NIETS

Alles maken met niets

Voor wiskundigen is de lege verzameling de beste benadering van het niets. Uitgerekend met deze 'lege doos' bouwen zij een heel universum. **Door George van Hal**

HET BEGON ALLEMAAL MET niets. En met de vraag naar wat getallen eigenlijk zijn. Hoewel we al duizenden jaren weten hoe we moeten tellen (zie ook 'De geschiedenis van het getal nul' op pagina 66), kon tot enkele tientallen jaren geleden niemand getallen precies definiëren. Natuurlijk: het verschil tussen één biertje en twee biertjes ziet vrijwel iedereen (tenzij hij al heel veel biertjes op heeft), maar wat is nu – heel fundamenteel – het daadwerkelijke verschil tussen één en twee, tussen twee en vijf, of tussen tien en zevenhonderd?

'Hoe merkwaardig het ook mag klinken, de precieze definitie van wat een natuurlijk getal is, is nog niet gemakkelijk te geven,' zegt Klaas Pieter Hart, wiskundige aan de Technische Universiteit Delft. Natuurlijk, stelt Hart, heb je een rijtje symbolen – 0 tot en met 9 – waarmee je alle getallen kunt samenstellen. Maar dat symbool is niets fundamenteels: of je nu '2' of 'II' schrijft, achter beide notaties zit hetzelfde getal. Dat geldt ook voor het woord. Twee, *two* (Engels), *zwei* (Duits), *deux* (Frans) of *mbili* (Swahili); het betekent allemaal hetzelfde.

Maar wat is dat getal twee dan wel? 'Je zou het kunnen definiëren aan de hand van dat rijtje symbolen 0 tot en met 9,' stelt Hart. 'Maar daar zit het woord 'rijtje' in, en een wiskundige vraagt zich dan meteen af: wat bedoel je daarmee?'

Een oplossing voor het probleem van de natuurlijke getallen begon te dagen in 1874, toen de Duitse wiskundige Georg Cantor de verzamelingenleer introduceerde. Een verzameling kun je zien als een soort wiskundige doos of zak met daarin de elementen van de verzameling. Zo bevat de verzameling 'natuurlijke getallen vanaf nul tot en met negen' in totaal tien elementen: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9.

'De precieze definitie van een natuurlijk getal is niet gemakkelijk te geven'

Niet lang na de introductie van de verzamelingenleer bedacht Cantor een methode om het aantal elementen in een verzameling te tellen – een eerste succes in de poging om de getallen los te weken van hun wiskundige notatie. Dat ging op de volgende manier. Stel je een verzameling voor met als elementen alle maanden in een jaar. Zo'n verzameling zouden we in wiskundige termen kunnen opschrijven, tussen accolades: {januari, februari, maart, april, mei, juni, juli, augustus, september, oktober, november, december}. Wil je het aantal elementen in die verzameling tellen, dan loop je simpelweg de lijst af: januari is een, februari is twee enzovoort tot en met december; nummer twaalf.

Provincies

Op dezelfde manier kun je je ook een verzameling voorstellen met de twaalf Nederlandse provincies: {Groningen, Friesland, Drenthe, Overijssel, Flevoland, Gelderland, Utrecht, Noord-Holland, Zuid-Holland, Zeeland, Noord-Brabant en Limburg}. Ook die kun je tellen door de elementen van de verzameling simpelweg langs te lopen. Groningen is dan een, en Limburg twaalf.

Wie de getallen onafhankelijk wil maken van hun notatie, moet nu iets tegenintuï-

De verzamelingenleer stelt dat een lege verzameling de bodem van alles is.
SHUTTERSTOCK

tiefs doen: de getallen weggooien en opnieuw beginnen. Met twee verzamelingen met twaalf elementen heb je de getallen een tot en met twaalf namelijk helemaal niet meer nodig. Nu kun je het ook hebben over het 'Groningen'-ste element uit de verzameling met de maanden van het jaar. Dat is januari. En net zo goed kun je spreken over het 'februari'-ste element uit de verzameling provincies. Dat is Friesland.

Symboliseren

Ook in andere situaties kun je de getallen nu compleet achterwege laten. Je kunt bijvoorbeeld stellen: er zitten Limburg maanden in een jaar. Of je kunt het hebben over 'de december provincies van Nederland.'

Dat klinkt op het eerste gezicht misschien weinig indrukwekkend, maar op de achtergrond beginnen zich de eerste contouren van een wiskundige getalsdefinitie af te tekenen. We hebben nu een methode om te begrijpen wat 'een gelijk aantal' exact betekent. Het aantal maanden in het jaar is gelijk aan het aantal provincies in Nederland. Niet omdat beide verzamelingen toevallig twaalf elementen hebben (het getal twaalf hebben we immers weggegooid), maar omdat je de elementen uit beide sets één-op-één op elkaar kunt projecteren.

Wie dat eenmaal beseft, is een belangrijke stap dichter bij een bevredigende definitie van de getallen. Het enige dat je nu nog nodig hebt, is een zogeheten 'specifieke representant' van de getallen – per getal één. Een specifieke representant is een wiskundig voorwerp dat een getal vertegenwoordigt. En dus gingen wiskundigen op zoek naar iets om de getallen op te projecteren.

Het was de Hongaars-Amerikaanse wiskundige John von Neumann die in het begin van de 20e eeuw de doorbraak teweegbracht. Von Neumann definieerde het getal nul als de hoeveelheid in een verzameling zonder elementen – de zogeheten lege verzameling. 'Dat is hetzelfde beest,' zegt Hart. 'Daarmee heb je een specifieke representant voor het getal nul.'

Wie begint met een lege verzameling kan alle natuurlijke getallen maken

De lege verzameling is een uniek geval. 'Wanneer je een object hebt, weet je één ding zeker: dat object is geen onderdeel van de lege verzameling,' zegt Hart.

De lege verzameling wordt in de wiskunde weergegeven met het symbool Ø en is vooral erg praktisch in allerlei berekeningen. Zo komt de lege verzameling goed van pas wanneer je een verzameling met twee appels wilt vergelijken met een verzameling met twee peren. 'Je weet zeker dat die twee verzamelingen niets gemeenschappelijks hebben. Maar in wiskundige zin wil je toch kunnen spreken van de verzameling van gemeenschappelijke elementen van beide verzamelingen. Dat is in dit geval de lege verzameling,' zegt Hart.

Wanneer je die lege verzameling koppelt aan het getal nul, is het nog maar een kleine stap om ook alle overige getallen logisch-wiskundig te onderbouwen. Het getal nul telt de elementen van een verzameling (namelijk die van de lege verzameling) en dus zouden alle andere getallen iets dergelijks moeten doen.

Hart: 'De volgende vraag is dan: wat symboliseert het getal 1?' Dat getal kun je definiëren als de verzameling met als enige element de lege verzameling. In symbolen is dat: 1 = {Ø}. 'Dan heb je het prototype van het getal 1 gedefinieerd, en zo kun je door.'

Een handige manier om verder te gaan, is om de lege verzameling voor te stellen als een lege zak. Het getal 0 valt dan te definiëren als een lege zak en het getal 1 als een zak met daarin een lege zak. Het getal 2 kun je dan definiëren als een zak met daarin én een lege zak én een zak met daarin een lege zak. Of, in symbolen: 2 = {Ø,{Ø}} = {0,1}. En 3 is, in symbolen, {Ø, {Ø}, {Ø, {Ø}}}, ofwel: 3 = {0, 1, 2}.

Die manier van getallen opschrijven, geeft Hart toe, is niet per se heel praktisch of natuurlijk. 'Maar deze definities van de natuurlijke getallen zijn voortgekomen uit de wens om zo precies mogelijk, met zo weinig mogelijk vooraf gedefinieerde begrippen, de getallen 0, 1, 2, 3 enzovoorts te definiëren,' zegt hij.

Wirwar

Als je de getallen eenmaal hebt gedefinieerd, kun je dat in de meeste praktische gevallen weer vergeten. Je kunt dan namelijk een handig notatiesysteem afspreken voor de getallen. In de praktijk zijn dat de Indo-Arabische getallen, zoals we die vandaag de dag gebruiken en in dit verhaal al vaak voorbij zijn gekomen. Hart: 'Ons rijtje cijfers is daarmee dus een schrijfwijze voor de getallen zoals die door de verzamelingenleer gedefinieerd zijn.'

Sommige takken van wiskunde – zoals analyse en algebra – lijken zich weinig aan te trekken van deze definitie van de getallen. 'In die vakgebieden doen ze net alsof de lezer al genoeg kennis heeft van wat de getallen zijn, en dat is ook prima,' zegt Hart. 'Maar de verzamelingenleer probeert alle wiskundige zaken in kaart te brengen, zodat je een keer een net overzicht hebt. In het dagelijks leven is de gebruikelijke methode goed genoeg, maar het is belangrijk dat wij nu weten dat daar een wetenschappelijk gedegen fundament onder ligt.'

De gehele wiskunde is in feite gebouwd op een stevig onwrikbaar fundament van niets

Dat wetenschappelijke fundament heeft veel bredere implicaties dan je op het eerste gezicht misschien zou denken. 'In de standaard verzamelingenleer is de lege verzameling de bodem van alles – letterlijk,' zegt Hart. Wie begint met de lege verzameling kan alle natuurlijke getallen maken, en nog veel meer: irrationele getallen zoals π, complexe getallen en zelfs alle mogelijke verzamelingen uit de verzamelingenleer.

Omdat je voor steeds complexere wiskundige voorwerpen steeds meer lege verzamelingen nodig hebt, wordt het resultaat van het herschrijven in termen van Ø een onoverzichtelijke wirwar van accolades binnen accolades. Maar die wirwar is wel de basis voor de gehele wiskundige werkelijkheid.

Dat werd bewezen met een andere stelling die na de succesvolle wiskundige definitie van de getallen aan de verzamelingenleer werd toegevoegd. 'Die stelling zegt dat elke mogelijke structuur uit de wiskunde altijd een kopie heeft binnen het universum van verzamelingen,' zegt Hart. En omdat elke verzameling geschreven kan worden als een verzameling van lege verzamelingen, betekent dat dat je met wat geknutsel met Ø werkelijk alles kunt bouwen dat wiskundig ook maar enige betekenis heeft. Uiteindelijk, zo leert de verzamelingleer ons dus, is de gehele wiskunde gebouwd op een stevig en onwrikbaar fundament van niets.

Met de lege verzameling kun je werkelijk alles bouwen dat wiskundig enige betekenis heeft. ■