

Vergelijkingen in Egypte en Mesopotamië

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Leiden, 1 april 2025

Tijd en bronnen

Het 'Oude Egypte' is de term die men gebruikt voor periode van rond 3000 BCE tot 300 BCE.

De wiskundige bronnen die er zijn stammen uit ongeveer 2000 BCE – 1600 BCE.

En dit zijn ze:

The extant hieratic source texts (in order of their publication) are

- *Rhind Mathematical Papyrus* (BM 10057–10058)
- *Lahun Mathematical Fragments* (7 fragments: UC32114, UC32118B, UC32134, UC32159–32162)
- *Papyrus Berlin 6619* (2 fragments)
- *Cairo Wooden Boards* (CG 25367 and 25368)
- *Mathematical Leather Roll* (BM 10250)
- *Moscow Mathematical Papyrus* (E4674)
- *Ostrakon Senmut* 153
- *Ostrakon Turin* 57170

(*Egyptian Mathematics*, Annette Imhausen.)

Getallen

Hieroglyphic			Hieroglyphic		
1		<i>wa</i>	10		<i>mD</i>
2		<i>sn</i>	20		<i>Dwt</i>
3		<i>xmt</i>	30		<i>mabA</i>
4		<i>fdn</i>	40		<i>Hmw</i>
5		<i>dj</i>	100		<i>Sn.t</i>
6		<i>sjs</i>	1000		<i>xA</i>
7		<i>sfx</i>	10,000		<i>DbA</i>
8		<i>xmn</i>	100,000		<i>Hfn</i>
9		<i>psD</i>	1,000,000		<i>HH</i>

Tientallig, maar niet positioneel.

Het Rhindpapyrus

We bekijken een paar problemen van dit papyrus



Een oud wiskunde 'boek': vijf-en-een-halve meter lang, 30 cm breed

Aftrekken

Opgave 21

Er wordt U gezegd: completeer $\overline{3} \overline{15}$ tot 1.

Uitleg

Egyptenaren werkten (vrijwel) uitsluitend met breuken van de vorm $\frac{1}{n}$.

Of eigenlijk stelt $\overline{n}$ **geen breuk** voor maar het getal met de eigenschap dat het product van n en $\overline{n}$ gelijk is aan 1 (de *multiplicatieve inverse* of *reciproque*).

In transcripties worden deze overstreept geschreven: $\overline{n}$ dus (soms ook met puntjes boven het getal).

Uitzondering: $\overline{3}$ staat voor $\frac{2}{3}$.

De som vraagt dus $\frac{2}{3} + \frac{1}{15}$ te completeren tot 1, want achter elkaar opschrijven impliceert optellen.

Opgave 21, de oplossing

Vermenigvuldig 15 met $\overline{3}$ dat geeft 10, en met $\overline{15}$ geeft 1.
Dat maakt 11; de rest is 4.

Vermenigvuldig 15 om 4 te krijgen.

1	15
$\overline{10}$	$1\overline{2}$
$\backslash\overline{5}$	3
$\backslash\overline{15}$	1
Totaal	4

Daarom moet $\overline{5}\overline{15}$ bij het gegeven getal opgeteld worden.

NB de 'backslash', $\backslash$, markeert de regels waarvan de resultaten opgeteld moeten worden.

Opgave 21, de oplossing

Ten bewijze tellen we ze allemaal op:

$$\overline{3} \overline{5} \overline{15} \overline{15}, \text{ maakt } 1$$

want, vermenigvuldigd met 15, zijn deze breuken gelijk aan

$$10 \ 3 \ 1 \ 1, \text{ maakt } 15$$

Opgave 21, facsimile

PROBLEM 21

Plate 44

Skannet med CamScanner

Facsimile of Plate 44 from the Rosetta Stone, showing hieroglyphs and their phonetic values. The text is organized into three columns, each starting with a label: -c-, -b-, and -a-.

Column 1 (-c-):

- Top: Hieroglyphs for 'q' (𐎓) and 'k' (𐎔).
- Middle: Hieroglyphs for 'm' (𐎎) and 'k' (𐎔).
- Bottom: Hieroglyphs for 'm' (𐎎), 'k' (𐎔), and 'd' (𐎁).

Column 2 (-b-):

- Top: Hieroglyphs for 'm' (𐎎), 'k' (𐎔), and 'd' (𐎁).
- Middle: Hieroglyphs for 'm' (𐎎), 'k' (𐎔), and 'd' (𐎁).
- Bottom: Hieroglyphs for 'm' (𐎎), 'k' (𐎔), and 'd' (𐎁).

Column 3 (-a-):

- Top: Hieroglyphs for 'm' (𐎎), 'k' (𐎔), and 'd' (𐎁).
- Middle: Hieroglyphs for 'm' (𐎎), 'k' (𐎔), and 'd' (𐎁).
- Bottom: Hieroglyphs for 'm' (𐎎), 'k' (𐎔), and 'd' (𐎁).

Opgave 21, transcript

Problem 21

dd n · k škm m¹ 3 is m 1
It is said to thee, Complete ½ ½ as 1.

10 1

dmd 11 dī·t m 4 wih-tp m 15 r gm·t 4
Total 11, remainder : 4. Operate on 15 for the finding of 4.

1	15
10	1 ½
\s	3
\is	1
dmd	4
<i>Total</i>	

hr š is m wih hr·f
Therefore ½ ½ is : to be added to² it.

tp n šty³
Example of proof.

hr km 3 š is is r 1
Therefore is complete up to
 10 3 1 1

ky š io m wih⁴
Another, ½ ½ is : to be added.

¹ This is an enclitic particle occasionally found after imperatives. It cannot be said to have an English equivalent. The arm written with the bird does not indicate a second consonant; it is here, as often, complementary to the m represented by the bird, for the arm itself came to have the value m and, especially in later times, was frequently written with the bird. In hieroglyphic texts the arm having this value is generally shown with a loaf in the hand.

² Literally *upon*.

³ It is extremely doubtful whether this phrase belongs in this problem. See Peet, pages 58–59.

⁴ These words and numbers have crept in through error. See Peet, pages 58–59, for conjectures as to the cause of their presence here.

Nog twee sommen

Opgave 22

Completeer $\overline{3} \overline{30}$ tot 1

Opgave 23

Completeer $\overline{4} \overline{8} \overline{10} \overline{30} \overline{45}$ tot $\overline{3}$.

Een AHA-opgave

(Nee, niet een 'aha' als in 'eureka', maar een fonetische weergave van het woord voor de 'onbekende' in de tekst.)

Opgave 24

Een hoeveelheid met zijn $\bar{7}$ erbij wordt 19. Wat is de hoeveelheid?

Oplossing, deel 1

Neem 7.

$\backslash 1$	7
$\backslash \bar{7}$	1
Totaal	8

Oplossing, deel 2

Zo vaak als 8 vermenigvuldigd moet worden om 19 te geven, zo vaak moet 7 vermenigvuldigd worden op het gevraagde getal te geven.

	1	8
	\2	16
	\2	4
	\4	2
	\8	1
Totaal	248	
	\1	248
	\2	424
	\4	92
De hoeveelheid is	1628	

Oplossing, deel 3

Nu nog de controle.

Doe het zo:

De hoeveelheid is	$16\overline{2}\overline{8}$
$\overline{7}$	$2\overline{4}\overline{8}$
Totaal	19

Dit heet wel de methode van 'false position'.

Begin met een grootte met een makkelijke $\overline{7}$, namelijk 7 zelf.

En kijk dan hoe je $7\overline{7}$ daarvan (dat is dus 8) moet aanpassen om 19 te krijgen.

En pas dan 7 dienovereenkomstig aan.

En wij lossen gewoon de vergelijking $x + \frac{1}{7}x = 19$ op ...

Nog iets over de Egyptische 'breuken'

Wat de opgaven nog ietsje lastiger maakt:

In de oplossingen moeten alle $\bar{n}$ *verschillend* zijn.

Daarom heeft het papyrus ook een tabel voor $\bar{n} + \bar{n}$ voor alle oneven n tot en met 101.

Van makkelijk, $\bar{3} = \bar{2} + \bar{6}$, tot wat ingewikkelder, $\bar{61} + \bar{61} = \bar{40} + \bar{244} + \bar{488} + \bar{610}$

Er geldt ook de volgende stelling

Stelling

Elk rationaal getal is op oneindig veel manieren te schrijven als (eindige) som van getallen van de vorm $\bar{n}$.

Nog een paar AHA-opgaven

Opgave 25

Een hoeveelheid met zijn $\overline{2}$ erbij wordt 16. Wat is de hoeveelheid?

Opgave 26

Een hoeveelheid met zijn $\overline{4}$ erbij wordt 15. Wat is de hoeveelheid?

Opgave 27

Een hoeveelheid met zijn $\overline{5}$ erbij wordt 21. Wat is de hoeveelheid?

Opgave 28

Een hoeveelheid en zijn $\overline{\overline{3}}$ erbij worden opgeteld en van de som wordt $\overline{3}$ van de som afgetrokken en 10 blijft over. Wat is de hoeveelheid?

Een cirkelvormig veld

Opgave 50

Een rond veld met een diameter van 9 khet. Wat is de oppervlakte?

Oplossing

Neem $1/9$ weg van de diameter, dat is 1; de rest is 8.

Vermenigvuldig 8 met 8; dat maakt 64. Je hebt dus 64 setat land.

Een cirkelvormig veld

Oplossing, vervolg

Doe het zo

$$\begin{array}{cc} 1 & 9 \\ \bar{9} & 1 \end{array}$$

dit weggenomen laat 8 over

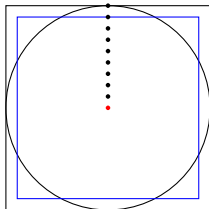
$$\begin{array}{cc} 1 & 8 \\ 2 & 16 \\ 4 & 32 \\ \backslash 8 & 64 \end{array}$$

De oppervlakte is 64 setat

Waar komt die regel vandaan?

Niet duidelijk, maar het kwam eerder voor.

Rhind, opgave 48: de verhouding van de oppervlakten van een cirkel met diameter 9 en het omgeschreven vierkant is gelijk aan $\frac{64}{81}$.



Teken het op milimeterpapier en tel de hokjes; bijna geen verschil.

De formule zou dus $O = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{256}{81}r^2$ zijn, conclusie: $\pi \approx 3,16049$

(Een collega vond deze benadering door vierkantjes op een stroopwafel te tellen ...)

Bronnen

Kleitabletten in spijkerschrift, hoofdzakelijk uit 2000–1500 BC en 300–0 BC

- ▶ numerieke tabellen
- ▶ stelling van Pythagoras
- ▶ lineaire vergelijkingen (niet zo veel)
- ▶ kwadratische vergelijkingen (heel veel)

Sexagesimaal (60-tallig) stelsel

 1	 11	 21	 31	 41	 51
 2	 12	 22	 32	 42	 52
 3	 13	 23	 33	 43	 53
 4	 14	 24	 34	 44	 54
 5	 15	 25	 35	 45	 55
 6	 16	 26	 36	 46	 56
 7	 17	 27	 37	 47	 57
 8	 18	 28	 38	 48	 58
 9	 19	 29	 39	 49	 59
 10	 20	 30	 40	 50	

Sexagesimaal (60-tallig) stelsel

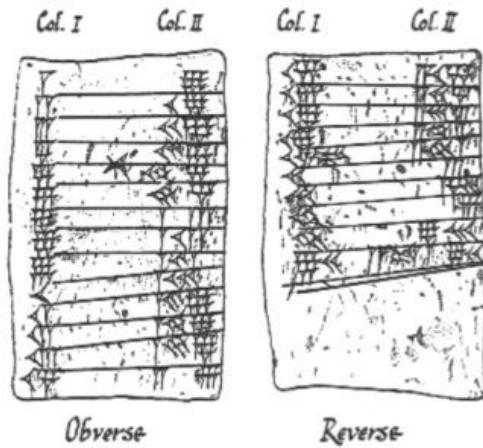
Notatie (positioneel):

72:	1,12
3680:	1,1,20
$1/5$:	0;12 (vaak ook 12')

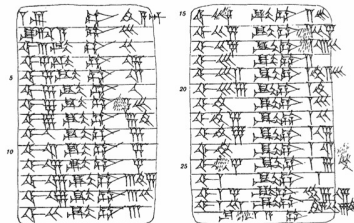
Dit is hoe men het opschrijft in de moderne literatuur.

Er was nog niet meteen een nul; vaak werd die positie leeg gelaten.
(Dat is vragen om moeilijkheden ...)

Tafel van 9



Reciproquen



Two thirds of 1 is 0;40.
 Its half is 0;30.
 The reciprocal of 2 is 0;30.
 The reciprocal of 3 is 0;20.
 The reciprocal of 4 is 0;15.
 The reciprocal of 5 is 0;12.
 The reciprocal of 6 is 0;10.
 The reciprocal of 8 is 0;07 30.
 The reciprocal of 9 is 0;06 40.
 The reciprocal of 10 is 0;06.
 The reciprocal of 12 is 0;05.
 The reciprocal of 15 is 0;04.
 The reciprocal of 16 is 0;03 45.
 The reciprocal of 18 is 0;03 20.
 The reciprocal of 20 is 0;03.

The reciprocal of 24 is 0;02 30.
 The reciprocal of 25 is 0;02 24.
 The reciprocal of 27 is 0;02 13 20.
 The reciprocal of 30 is 0;02.
 The reciprocal of 32 is 0;01 52 30.
 The reciprocal of 36 is 0;01 40.
 The reciprocal of 40 is 0;01 30.
 The reciprocal of 45 is 0;01 20.
 The reciprocal of 48 is 0;01 15.
 The reciprocal of 50 is 0;01 12.
 The reciprocal of 54 is 0;01 06 40.
 The reciprocal of 1 00 is 0;01.
 The reciprocal of 1 04 is 0;00 56 15.
 The reciprocal of 1 21 is 0;00 44 26 40.
 <Its half>

Figure 9. MLC 1670, after Clay [7, no. 37].

Tablet VAT 8389

Opgave

Het eerste veld leverde $\frac{2}{3}$ sila per sar op

Het tweede veld leverde $\frac{1}{2}$ sila per sar op

Het eerste veld leverde 500 sila meer op dan het tweede

De som van de oppervlakten van de velden is 1800 sar

Wat is de oppervlakte van elk veld?

Een sila is ongeveer een liter, en een sar is ongeveer 34 m^2 .

Een vertaling (woord voor woord, en hertaald) van het hele tablet is op [deze pagina](#) te vinden.

Tablet VAT 8389

Oplossing

Het eerste veld leverde 1200 sila op per 1800 sar

Het tweede veld leverde 900 sila op per 1800 sar

Het eerste veld leverde 500 sila meer op dan het tweede

De totale oppervlakte van de velden is 1800 sar

Halveer het totaal: $1800/2 = 900$

We hebben twee waarden van 900

Het eerste veld leverde 600 sila per 900 sar op (onthouden!)

Het twee veld leverde 450 sila per 900 sar op (onthouden!)

Dan: $600 - 450 = 150$ en $500 - 150 = 350$ (onthouden!)

Tablet VAT 8389

Oplossing, vervolg

$$\text{Nu } \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

$$\text{En } \frac{7}{6} \times 300 = 350 \text{ (die je hebt onthouden!)}$$

Dus haal 300 weg bij de ene en geef die aan de andere

$$900 + 300 = 1200, \text{ en } 900 - 300 = 600$$

Het eerste veld is 1200 sar groot

Het tweede veld is 600 sar groot.

Controle:

$$\text{Het eerste veld leverde } \frac{2}{3} \times 1200 \text{ sila op: } 800$$

$$\text{Het tweede veld leverde } \frac{1}{2} \times 600 \text{ sila op: } 300$$

$$\text{En } 800 - 300 = 500.$$

Tablet VAT 8389

Vertaling naar onze tijd

Noem de oppervlakten van de velden x en y , dan komt er dit stelsel vergelijkingen:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y &= 500 \\ x + y &= 1800\end{aligned}$$

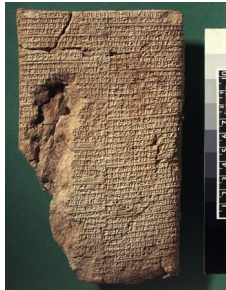
De strategie in de oplossing is: begin met $x = y = 900$ en kijk hoeveel je ze moet aanpassen om aan de eerste vergelijking te voldoen. (False position dus.)

Met $x = y = 900$ krijgen we als verschil in opbrengst $600 - 450 = 150$, dat is 350 te weinig.

Als we x met z ophogen en y met z verminderen gaat het verschil met $\frac{2}{3}z + \frac{1}{2}z = \frac{7}{6}z$ omhoog.

En $\frac{7}{6} \times 300 = 350$, dus x moet 1200 zijn, en y moet 600 zijn.

Tablet BM 13901



Vierentwintig kwadratische vergelijkingen met oplossingen

Tablet BM 13901

Opgave 1

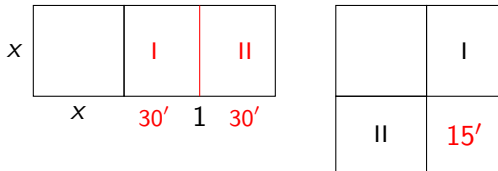
Ik heb het vierkant en de zijde samengenomen: 45' is het. De projectie is 1.

Oplossing

Jij: breek de 1, je krijgt 30' en 30' (onthouden!).

Doe 15' bij 45': geeft 1, met zijde 1.

Haal de 30' die je onthouden hebt uit de 1: de zijde.



Tablet BM 13901

Opgave 2

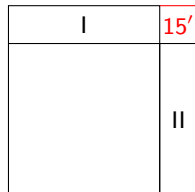
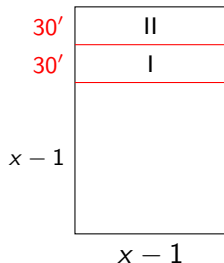
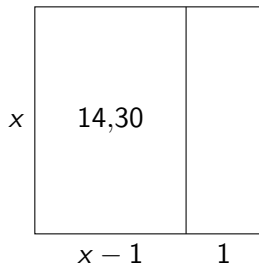
Ik heb de zijde uit het vierkant weggehaald: 14,30 is het. De projectie is 1.

Oplossing

Jij: breek de 1, je krijgt 30' en 30' (onthouden!).

Doe 15' bij 14,30: 14,30;15, de zijde is 29;30.

De 30' die je onthouden hebt doe je bij 29;30': 30 is de zijde.



Kwadraat afsplitsen

Wat hier gebeurt heet in het Engels “completing the square” (dat past beter dan het Nederlands “kwadraat afsplitsen”).

In beide gevallen hebben we een rechthoek $x(x + b)$ of $x(x - b)$ waarvan de oppervlakte gelijk is aan een gegeven getal (in onze gevallen $b = 1$).

In beide gevallen bouwden we die om tot een vierkant waar nog een vierkantje aan ontbrak.

Door dat vierkantje toe te voegen maakten we de vierkanten volledig:

$$x(x + b) + \frac{1}{4}b^2 = (x + \frac{1}{2}b)^2 \text{ en } x(x - b) + \frac{1}{4}b^2 = (x - \frac{1}{2}b)^2$$

Met als bonus een vergelijking die er makkelijker uit ziet:

$$\left(x + \frac{1}{2}b\right)^2 = c + \frac{1}{4}b^2 \quad \text{en} \quad \left(x - \frac{1}{2}b\right)^2 = c + \frac{1}{4}b^2$$

Tablet BM 13901

Opgave 1 in onze taal

De vergelijking is $x^2 + x = \frac{3}{4}$.

Tel aan beide kanten $\frac{1}{4}$ op: $(x + \frac{1}{2})^2 = 1$.

Dus $x + \frac{1}{2} = 1$, en dus $x = \frac{1}{2}$.

Opgave 2 in onze taal

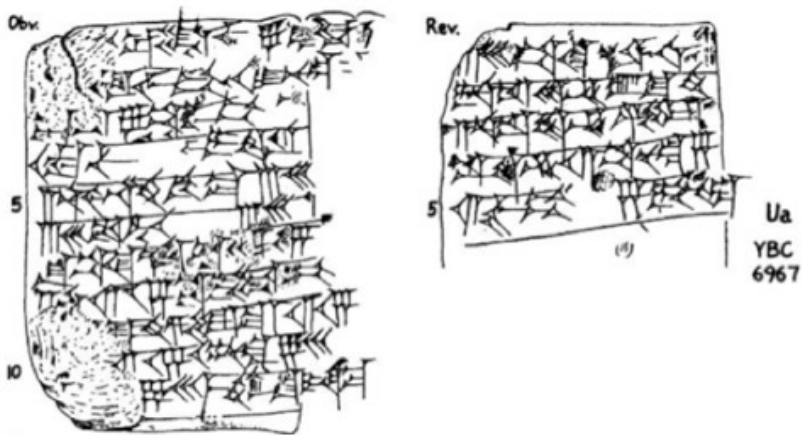
De vergelijking is $x^2 - x = 870$ ($14 \times 60 + 30 = 870$).

Tel aan beide kanten $\frac{1}{4}$ op: $(x - \frac{1}{2})^2 = 870\frac{1}{4}$.

Dus $x - \frac{1}{2} = 29\frac{1}{2}$, en dus $x = 30$.

NB Alleen positieve oplossingen want het gaat in de praktijk altijd om grootheden als lengte, oppervlakte, inhoud, enzovoort.

Een impliciete kwadratische vergelijking



YBC 6967 (zie [hier](#) voor een vertaling)

Wat staat er op YBC 6967?

Opgave

Een reciproque overschrijdt zijn reciproque met 7. Wat zijn de reciproque en zijn reciproque?

Oplossing

Jij: breek de 7 waarmee de reciproque zijn reciproque overschrijdt zó dat 3;30 (verschijnt).

Combineer 3;30 en 3;30 zó dat 12;15 (verschijnt).

Tel 1,00, de oppervlakte, op bij de 12;15 die voor je verscheen zó dat 1,12;15 (verschijnt).

Wat is de zijde van 1,12;15? 8;30.

Teken 8;30 en 8;30, zijn tegenhanger, en haal dan 3;30, de helft, van de ene weg en voeg hem toe aan de andere.

De ene is 12, de andere is 5. De reciproque is 12, zijn reciproque is 5.

De algemene kwadratische vergelijking

De aanpak van de algemene kwadratische vergelijking, zeg

$$ax^2 + bx = c$$

is pragmatisch: vermenigvuldig met a , er komt

$$(ax)^2 + b(ax) = ac$$

dat wil zeggen een tussentijdse vergelijking

$$z^2 + bz = ac$$

Pas de methoden hierboven toe en deel aan het eind door a .