Vergelijkingen in Griekenland en China

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Leiden, 8 april 2025

Inleiding

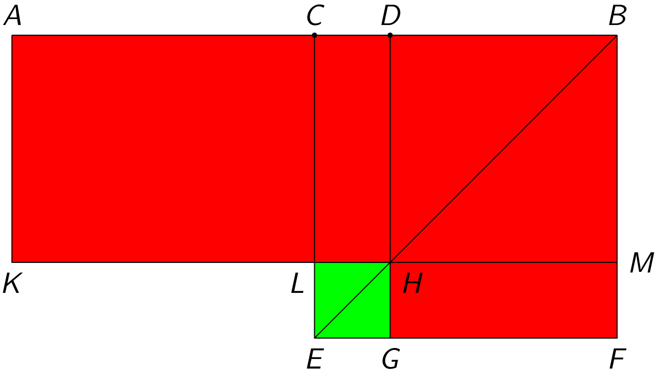
Er was contact tussen de Mesopotamiërs en de Grieken.
De Grieken kenden bijvoorbeeld de waarnemingen aan de sterren uit Mesopotamië.

Wat niet duidelijk is is wat de Grieken met de algebraïsche werken gedaan hebben.
De algebra (anachronisme) van de Grieken die we kennen was veel meetkundiger.
We kijken even bij Euclides (waar anders?).

Boek II van *De Elementen*.
(Vertaling van E. J. Dijksterhuis.)

Boek II, Propositie 5

Indien een rechte lijn verdeeld wordt in gelijke en ongelijke delen, is de rechthoek, omvat door de ongelijke delen van het geheel, samen met het vierkant op het stuk tussen de deelpunten, gelijk aan het vierkant op de helft.



De lijn AB wordt bij C (gelijk) en D (ongelijk) gedeeld.
Ik zeg dat de rechthoek $AD \times BD$ en het vierkant op CD gelijk zijn aan het vierkant op BC.
Want $AC \times AK$ en $BF \times BD$ zijn gelijk.

Boek II

Wat gebeurt er?

De rechte AB is gegeven en wordt verdeeld in $x = AD$ en $y = DB$.
Dan is CD gelijk aan $x - \frac{1}{2}(x+y) = \frac{1}{2}(x-y)$.
De stelling zegt: $xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

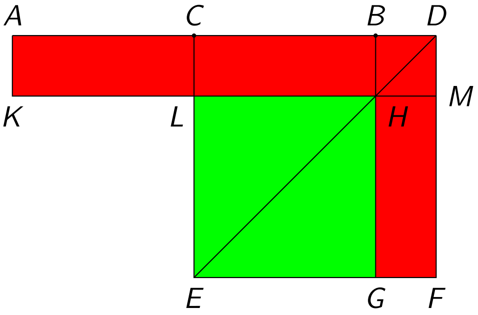
Dit kan worden gebruikt om een gegeven lijnstuk met lengte b te verdelen in twee stukken met voorgegeven product c^2.
Omdat $y = b - x$ komt dit neer op het oplossen van $x(b-x) = c^2$ ofwel $x^2 - bx + c^2 = 0$, of ook $x^2 + c^2 = bx$.
Of invullen in het resultaat:

$$c^2 + CD^2 = \frac{1}{4}b^2$$

maak dus een rechthoekige driehoek met hypothenusa $\frac{1}{2}b$ en rechthoekszijde c; de andere rechthoekszijde is als gewenst.

Boek II, Propositie 6

Indien een rechte lijn middendoor wordt gedeeld en er wordt een rechte in rechte lijn aan haar toegevoegd, dan is de rechthoek, omvat door de hele rechte met de toegevoegde en de toegevoegde, samen met het vierkant op de helft gelijk aan het vierkant op de rechte, bestaande uit de helft en de toegevoegde.



De lijn AB wordt bij C gelijk gedeeld en BD wordt toegevoegd.
Ik zeg dat de rechthoek $AD \times BD$ en het vierkant op CB gelijk zijn aan het vierkant op CD.
Want $AC \times AK$ en $GH \times GF$ zijn gelijk.

Boek II

Hier gebeurt het omgekeerde van Propositie 5: nu hebben we $x = AD$ en $y = BD$ en $x - y = b = AB$. Algebraïsch: $x(x - b) = (x - \frac{1}{2}b)^2 - \frac{1}{4}b^2$.

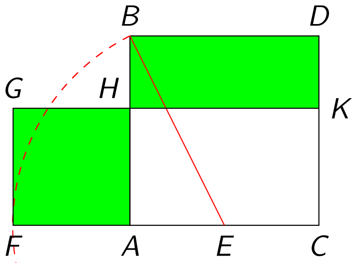
Dit leidt tot het oplossen van: bepaal x en y zó dat $x - y = b$ en $xy = c^2$.

Vergelijk dit met de Mesopotamische sommen van vorige week.

Boek II

Propositie 11

Snijd een gegeven lijnstuk zó dat de rechthoek opgespannen door het geheel en één van de stukken gelijk is aan het vierkant opgespannen door het andere stuk.



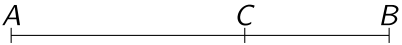
In formule: $a(a-x)=x^2$, ofwel $x^2+ax=a^2$, met $a=AB$ en $x=AH$.

Euclides

Dit komt terug in Boek VI.

Definitie 3

We zeggen dat een lijnstuk verdeeld is in uiterste en middelste reden als, zo het hele lijnstuk is tot het grootste deel, het grotere tot het kleinere is.

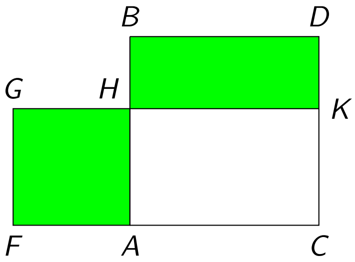


Wat dit zegt is $AB : AC = AC : CB$.

Boek VI, Propositie 30

Een gegeven begrensde rechte in uiterste en middelste reden verdelen.

Kijk naar het plaatje van Boek II, Propositie 11



We hebben $AH^2 = HB \cdot AB$, en dus $AB : AH = AH : HB$.

De gemeenschappelijke verhouding heet nu de Gulden Snede.

Arithmetica

De *Arithmetica* van Diophantus ($\approx$ 350 CE)

Vergelijkingen met één of meerdere onbekenden ("Diophantische vergelijkingen")

Namen voor machten:

Naam	macht	naam	macht
arithmoi	x	arithmoston	x^{-1}
dynamis	x^2	dynamoston	x^{-2}
kybos	x^3	kyboston	x^{-3}
dynamodynamis	x^4	dynamodynamoston	x^{-4}
dynamokybos	x^5	dynamokyboston	x^{-5}
kybokybos	x^6	kybokyboston	x^{-6}

Arithmetica

Notatie voor veel dingen:

$$\boxed{K^{Y}\alpha\varsigma\gamma\pitchfork\Delta^{Y}\gamma\mathring{M}\alpha \text{ for } x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$$

"Eén (α) derde macht (K^{Y}), drie (γ) getallen (ς),
verminderd met ($\pitchfork$) drie (γ) kwadraten (Δ^{Y}) en één (α) eenheid ($\mathring{\mathrm{M}}$)"

Optellen: gewoon achter elkaar zetten

Aftrekken: $\pitchfork$ "verminderd met"

Arithmetica

Diophantus behandelt eerste- en tweedegraadsvergelijkingen. Algebraïsch, in de geest van de Mesopotamiërs.

Maar ook veel vergelijkingen met meer dan één onbekende.

De gezochte oplossingen zijn altijd rationaal.

Er zijn dus 'Diophantische vergelijkingen' zonder oplossingen.

In de twintigste eeuw:

Hilbert's tiende probleem

Gegeven een diophantische vergelijking met een willekeurig aantal variabelen en met geheeltallige coëfficiënten. Stel een methode op waarmee in een eindig aantal stappen kan worden bepaald of er gehele getallen zijn die aan de vergelijking voldoen.

Oplossing (1969): zo'n methode is er niet.

Boek II, probleem VIII

Een kwadraat in twee kwadraten verdelen.

Oplossing: Verdeel 16 in een som van twee kwadraten.

Laat de eerste term gelijk zijn aan x^2, dus de tweede is $16 - x^2$. De laatste moet een kwadraat zijn.

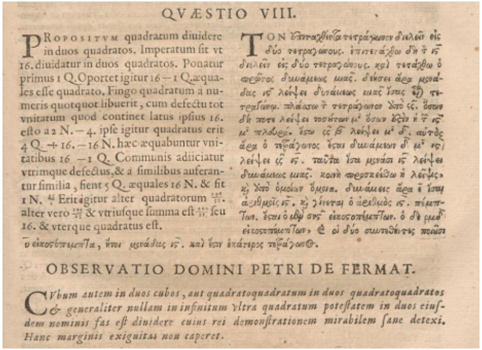
Ik vorm het kwadraat van het verschil van een willekeurig veelvoud van x verminderd met de wortel [van] 16, dat wil zeggen, verminderd met 4.
Ik vorm, bijvoorbeeld, het kwadraat van $2x - 4$. Het is $4x^2 + 16 - 16x$.

Ik zet deze uitdrukking gelijk aan $16 - x^2$. Ik tel aan beide kanten $x^2 + 16x$ op en trek 16 af. Op deze manier krijg ik $5x^2 = 16x$, en dus $x = 16/5$.

Dus één getal is $256/25$ en het andere $144/25$. De som van deze getallen is 16 en elk is een kwadraat.

In zijn exemplaar van de *Arithmetica* schreef een zekere Fransman iets in de kantlijn ...

In de kantlijn van de Arithmetica van Pierre de Fermat



QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipsius 16. esto à 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. 16/5 Erit igitur alter quadratorum 256/25. alter vero 144/25 & vtriusque summa est 400/25 seu 16. & vterque quadratus est.

[illegible]

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Dit is een (her)uitgave door de zoon van Fermat, met zijn vaders aantekeningen ingevoegd

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Het is niet mogelijk een derdemacht in twee derdemachten te verdelen, of een vierdemacht in twee vierdemachten, of in het algemeen, een macht hoger dan de tweede in twee gelijkaardige machten. Ik heb hier een waarlijk wonderlijk bewijs voor gevonden, waar deze marge te nauw voor is om het te kunnen bevatten.

Getalsystemen

Rond 4de eeuw BC een tientallig stelsel zonder nul.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

Waarom twee soorten?

Voor het leesgemak: de eersten bij eenheden, hondertallen . . . , de tweede rij voor de tientallen, duizendtallen . . .

Dus 𝍩𝍠𝍭𝍥 is 1156
en 𝍮 𝍰𝍢 is 6083 (er staat een spatie in plaats van een nul)

Er werden wel stippen gezet om lege plaatsen te markeren maar een echte ‘nul’ ziet men pas in de 12de eeuw.

De methode van Overschot en Tekort

Opgave

Een are goed land kost 300 goudstukken; de prijs van 7 aren slecht land is 500. Men heeft 100 aren land gekocht; de prijs was 10.000. Hoeveel goed land is er gekocht en hoeveel slecht?

Oplossing:
Stel er zijn 20 aren goed land en 80 aren slecht, dan is het overschot $1714\frac{2}{7}$.
Als er 10 aren goed en 90 aren slecht land zijn is het dan is het tekort $571\frac{3}{7}$.
Neem nu $20 \times 571\frac{3}{7}$ en $10 \times 1714\frac{2}{7}$ en deel hun som door de som van $571\frac{3}{7} + 1714\frac{2}{7}$.
Het resultaat, $12\frac{1}{2}$ aren, is de hoeveelheid goed land. De hoeveelheid slecht land, $87\frac{1}{2}$ aren, is nu makkelijk te vinden.

Uitleg?

De methode van Overschot en Tekort

In onze notatie

$$\begin{aligned} 20 \times 300 + 80 \times \tfrac{500}{7} &= 10.000 + 1714\tfrac{2}{7} \\ 10 \times 300 + 90 \times \tfrac{500}{7} &= 10.000 - 571\tfrac{3}{7} \end{aligned}$$

Vermenigvuldig de eerste met $T = 571\frac{3}{7}$ en de tweede met $O = 1714\frac{2}{7}$ en tel op:

$$(20T + 10O) \times 300 + (80T + 90O) \times \frac{500}{7} = (T + O)10.000 + (TO - OT)$$

en deel door $T + O$:

$$\frac{20T + 10O}{T + O} \times 300 + \frac{80T + 90O}{T + O} \times \frac{500}{7} = 10.000$$

Neem dus het *gewogen gemiddelde* van de twee pogingen.

Stelsels en eliminatie

Opgave

Er zijn drie klassen graan, waarvan drie bossen van de eerste klasse, twee bossen van de tweede en één van de derde 39 eenheden maken. Twee van de eerste, drie van de tweede en één van de derde maken 34 eenheden. En één van de eerste, twee van de tweede en drie van de derde maken 26 eenheden.

Hoeveel eenheden bevat één bos graan van elke klasse?

Stelsels en eliminatie

De oplossing:
Zet de 3, 2, en 1 bossen en de 39 eenheden rechts. Zet de andere voorwaarden in het midden en links.

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Vermenigvuldig de middelste kolom met de eerste klasse in de rechterkolom en laat meteen weg. Doe het hetzelfde met de linkerkolom. Met wat overblijft van de tweede klasse in de middelste kolom, laat meteen weg.

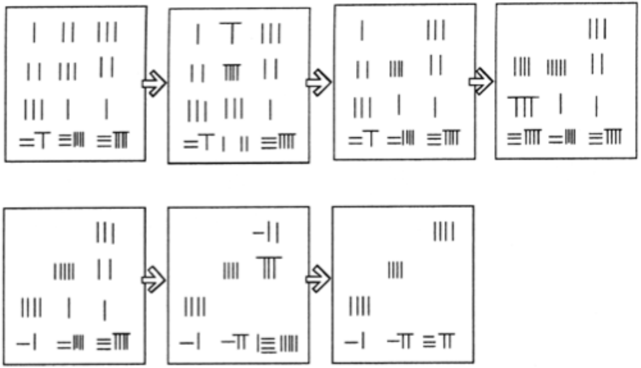
1	0	3
2	5	2
3	1	1
26	24	39

0	0	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

Stelsels en eliminatie

Dat is dus eigenlijk Gauss-eliminatie.



De rest van de oplossing is het eenvoudig oplossen van het nieuwe driehoeksstelsel.

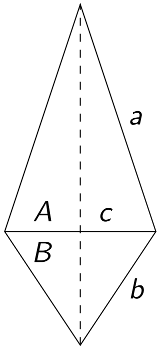
Polynoomvergelijkingen

Los op: $-x^4 + 763.200x^2 - 40.642.560.000 = 0$
Huh?

Het gaat om de oppervlakte, x, van het stukje land rechts.
Die drukken we natuurlijk zo uit in a, b, en c.
$A = \frac{c}{2}\sqrt{a^2 - (\frac{c}{2})^2}$ en $B = \frac{c}{2}\sqrt{b^2 - (\frac{c}{2})^2}$
Dan voldoet $x = A + B$ aan

$$-x^4 + 2(A^2 + B^2)x^2 - (A^2 - B^2)^2 = 0$$

Neem nu $a = 39$, $b = 25$, en $c = 30$ ...
(Waarom makkelijk als het moeilijk kan?)



Polynoomvergelijkingen

Maple:

- $A = 540$
- $B = 300$
- $A + B = 840$

En de vergelijking klopt; de oplossingen daarvan zijn:

$$240, \; 840, \; -840, \; 240$$

Polynoomvergelijkingen

De oplossing gaat als een soort staartdeling:

- Voorspel het aantal cijfers door proberen (3 cijfers)
- Bepaal het eerste cijfer door proberen (8)
- Schrijf $x = 800 + y$ en pas de binomiaalformules toe
- Bepaal het eerste cijfer van y, enzovoort

Dit werd weergegeven op een bord.

Voordeel: men kon gewoon doorgaan met cijfers 'achter de komma'.

NB De Chinezen kenden de 'Driehoek van Pascal' en dus de binomiaalformules voor de machten $(a + b)^n$.

Polynoomvergelijkingen

De methode leek wijd verbreid, veel wiskundigen gebruikten hem.

De Chinezen hadden geen problemen met negatieve getallen.

Ze hadden dus maar één soort vergelijking: $f(x) = 0$.

Toch: weinig negatieve oplossingen, want de problemen vroegen altijd om positieve getallen: lengte, oppervlakte, inhoud, ...