

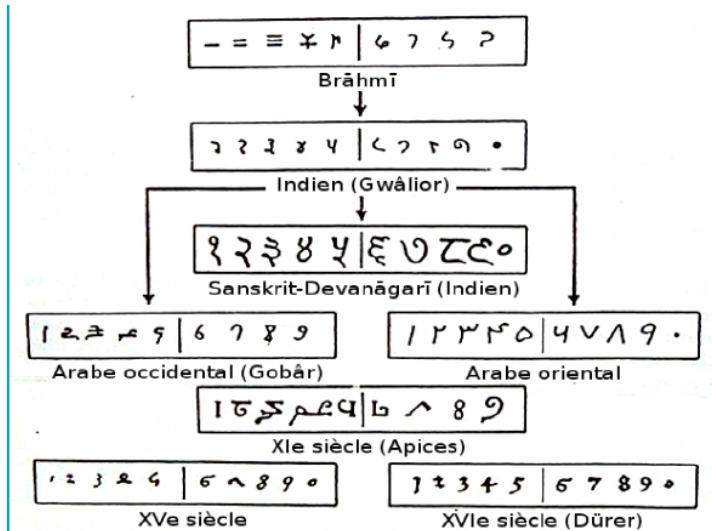
Vergelijkingen in India en de Islam

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Leiden, 15 april 2025

Ontwikkeling van 'de' cijfers



Worteltrekken (*Aryabhata*, 499)

Algorithmen voor wortel en derdemachtswortel (die hadden de Chinezen ook).

Worteltrekken met gebruik van $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$$\begin{array}{r} 665856 \quad 816 \\ 8 \times 8 = 64 \\ \hline 258 \\ 161 \times 1 = 161 \\ \hline 9756 \\ 1626 \times 6 = 9756 \\ \hline 0 \end{array}$$

Derdemachtswortel: via $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Rekenen met 0 en $+/-$ (*Brahmagupta*, 628)

The sum of two positive quantities is positive; of two negative is negative; of a positive and a negative is their difference; or, if they are equal, zero The product of a negative quantity and a positive is negative; of two negative, is positive; of two positive, is positive Positive divided by positive or negative by negative is positive Positive divided by negative is negative. Negative divided by positive is negative.

Brahmagupta: *abc*-formule

Los op $ax^2 + bx = c$

“Diminish by the middle [number] the square-root of the rupas multiplied by four times the square and increased by the square of the middle [number]; divide the remainder by twice the square. [The result is] the middle [number].”

[a = ‘square’, b = ‘middle’, c = ‘the rupas’]

lets korter:

$$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}$$

Bhāskara: een opgave

Het achtste deel van een groep apen, gekwadraterd, was aan het springen in een grot en hadden veel plezier. Twaalf overgebleven apen zaten op een heuvel, gezellig met elkaar aan het praten. Hoeveel waren er in totaal?

Hier staat een kwadratische vergelijking: $(\frac{1}{8}x)^2 + 12 = x$.

Vermenigvuldig met 64 en breng in de juiste vorm: $x^2 - 64x = -768$.

Nu 'kwadraat completeren', vermenigvuldig met 32^2 : $x^2 - 64x + 1024 = 256$.

En twee oplossingen: $x - 32 = 16$, en, omdat $16 < 32$, ook $x - 32 = -16$.

al-Khwārizmī

Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī

Book on Addition and Subtraction after the Method of the Indians

(We kennen alleen Latijnse vertalingen.)

Negen karakters voor de eerste negen getallen en een nul.

Algoritmen voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, halveren, verdubbelen, vierkantswortels.

Nadeel: bedoeld om in het zand geschreven te worden; bij elke stap werden tussenresultaten uitgeveegd.

Een Latijnse vertaling begint met “Dixit Algorizmi”,
en ‘algorizmi’ ging op de operaties slaan en niet op de man.

Zo zijn we aan het woord *algoritme* gekomen.

al-Uqlīdīsī

Abu l-Hasan al-Uqlīdīsī

The Book of Chapters on Hindu Arithmetic (952, Damascus; ontdekt in 1960)

Twee verbeteringen.

Ten eerste: hoe op papier te werken, zonder uitvegen.

Voorbeeld: 3249×2735

			3249			
			2735			
6	21	9	15			
	4	14	6	10		
		8	28	12	20	
			18	63	27	45

En nu van rechts naar links optellen maar met cijfers meenemen.

Ten tweede: decimale breuken.

De helft van 1 op een plek is een 5 op de plek **ervoor**.

Dus als we een oneven getal halveren zetten we de helft als 5 er voor met een ' om de plaats van de eenheden te markeren.

Voorbeeld: 19, 9'5, 4'75, 2'375, 1'1875, en 0'59375.

Een mooi citaat.

Computers have to use it because it is easy, quick and needs little precaution, ... and little keeping of the heart busy by the working that should be seen by the hands, to the extent that if he [the computer] talks, that will not spoil his work; and if he leaves it and busies himself with something else, when he comes back to it he will find the same and continue what he wants to continue, thus saving the trouble of memorizing it and keeping his heart busy with it.

This is not the case in the other (arithmetic) which requires finger bending and other necessities. Most computers will have to use it [the Indian method] with numbers that cannot be managed by the hand because they are big.

al-Khwārizmī

Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī

The Condensed Book on the Calculation of al-Jabr and al-Muqābala

al-Jabr: herstellen: een afgetrokken getal naar de andere kant brengen

Bijvoorbeeld: $3x + 2 = 4 - 2x$ gaat over in $5x + 2 = 4$.

al-Muqābala: vergelijken: links en rechts evenveel aftrekken

Bijvoorbeeld: $5x + 2 = 4$ gaat over in $5x = 2$.

En ja, 'al-Jabr' is 'Algebra' geworden

Een klassificatie van kwadratische vergelijkingen.

1. $ax^2 = bx$ — squares are equal to roots
2. $ax^2 = c$ — squares are equal to numbers
3. $bx = c$ — roots are equal to numbers
4. $ax^2 + bx = c$ — squares and roots are equal to numbers
5. $ax^2 + c = bx$ — squares and numbers are equal to roots
6. $bx + c = ax^2$ — roots and numbers are equal to squares

Voorbeeld van type 4:

What must be the square which, when increased by ten of its roots, amounts to thirty-nine?

The solution is this: you halve the number of roots, which in the present instance yields five. This you multiply by itself; the product is twenty five. Add this to thirty-nine; the sum is sixty-four. Now take the root of this which is eight, and subtract from it half the number of roots, which is five; the remainder is three. This is the root of the square which you sought for.

In andere woorden: los op: $x^2 + 10x = 39$. Dat doe je door 10 (het aantal wortels) te halveren, dat geeft 5. Neem het kwadraat van 5, dat is 25. Tel dat op bij 39, dat geeft 64. Neem hiervan de wortel, dat is 8. Trek hier de 5 van af, de rest is 3. Dat is de oplossing.

In symbolen:

$x^2 + 10x = 39$ wordt $x^2 + 10x + 25 = 64$, of $(x + 5)^2 = 8^2$, dus $x + 5 = 8$ of $x = 3$.

Algemeen: $x^2 + bx = c$ wordt $x^2 + bx + (\frac{b}{2})^2 = c + (\frac{b}{2})^2$.

Hier staat dus $(x + \frac{b}{2})^2 = c + (\frac{b}{2})^2$.

En dus $x = \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + c} - \frac{b}{2}$. (Dat hebben we eerder gezien.)

Rechtvaardiging: Propositiones 5 en 6 uit Boek II van de *Elementen*.

Abū Kāmil

Abū Kāmil ibn Aslam ($\approx$ 850–930)

Kitāb fī al-jabr wa'l-muqābala

Onderbouwde de methoden van al-Khwārizmī met behulp van *De Elementen*, vooral boek II.

Hij was niet bang voor irrationale grootheden.

Probleem 37

If one says that 10 is divided into two parts and one part is multiplied by itself and the other by the root of 8, and subtract the quantity of the product of one part times the root of 8 from ... the product of the other part multiplied by itself, it gives 40.

Kortweg, los op: $(10 - x)(10 - x) - x\sqrt{8} = 40$.

Oplossing: maak er type 5 van: $x^2 + 60 = (20 + \sqrt{8})x$ en volg de methode.

We vinden $x = 10 + \sqrt{2} - \sqrt{42 + \sqrt{800}}$

Problem 45

One says that 10 is divided into two parts, each of which is divided by the other, and when each of the quotients is multiplied by itself and the smaller is subtracted from the larger then there remains 2.

Los op

$$\left(\frac{10-x}{x}\right)^2 - \left(\frac{x}{10-x}\right)^2 = 2$$

Vooruit, nog eentje dan:

Probleem 61

One says that 10 is divided into three parts, and if the smallest is multiplied by itself and added to the middle multiplied by itself, it equals the largest multiplied by itself, and when the smallest is multiplied by the largest, it equals the middle multiplied by itself.

Bepaal $x < y < z$ zó dat $x + y + z = 10$, $x^2 + y^2 = z^2$, en $xz = y^2$.

Strategie: 'false position': los de laatste twee op voor $x = 1$ en herschaal dan tot $x + y + z = 10$.

Abū Kāmil

Niet te onderschatten bijdrage van Abū Kāmil: alles was gewoon een 'getal'.
Niet iets meetkundigs als rechthoek, lijn, ...

De onderbouwing was meetkundig, maar de toepassingen waren algebraïsch.

Abū Bakr al-Karajī (†1019)

al-Fakhrī (The Marvelous) “het bepalen van bekenden uitgaande van bekenden”

Definitie van, en namen voor, willekeurige machten.

Rekursief: $x^{n+1} = x^n \cdot x$ en $(\frac{1}{x})^{n+1} = (\frac{1}{x})^n \cdot \frac{1}{x}$.

Hiermee ontwikkelde hij elementaire rekenkunde met polynomen.

Net als Abū Kāmil niet bang voor wortelvormen:

$$\sqrt{A+B} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B^2}}{2}}$$

en

$$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{A^2B} + 3\sqrt[3]{AB^2} + A + B}$$

Ga maar na ...

En hou er rekening mee dat dit allemaal in woorden ging.

al-Samaw'al (≈ 1125 –1174)

Al-Bāhir fi'l ḥisāb (The Shining Book of Calculation)

Door de woorden was de optelregel voor machten niet duidelijk zichtbaar:
het product van een kwadraat en een kubus was bijvoorbeeld een kwadraat-kubus

al-Samaw'al maakte een tabel

7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7
x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	1	x^{-1}	x^{-2}	x^{-3}	x^{-4}	x^{-5}	x^{-6}	x^{-7}

The distance of the order of the product of the two factors from the order of one of the two factors is equal to the distance of the order of the other factor from the unit. If the factors are in different directions then we count [the distance] from the order of the first factor towards the unit; but, if they are in the same direction, we count away from the unit.

(Hij had geen getallen in de eerste rij maar de namen ...)

Hij kon nu ook polynomen op elkaar delen, door een staartdeling.

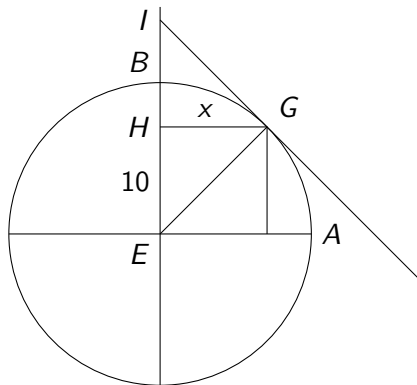
$$\frac{20x^2 + 30}{6x^2 + 12} = 3\frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{x} - 6\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^2} - 10 \cdot \frac{1}{x^3} + 13\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^4} + 20 \cdot \frac{1}{x^5} - 26\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^6} - 40 \cdot \frac{1}{x^7}$$

Controle door uitvermenigvuldigen: het is “het antwoord bij benadering”

al-Khayyāmī (1048–1131)

Umar ibn Ibrāhīm al-Khayyāmī (bekend als Omar Khayyam)

On the Division of the Quadrant of a Circle



Bepaal het punt G zó dat

$$AE : GH = EH : HB$$

Doe of je G hebt en trek de raaklijn

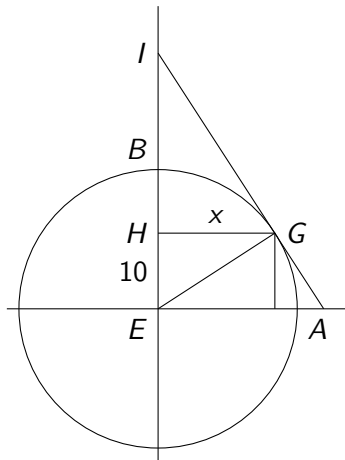
Er moet gelden $EI = EG + GH$ (aantekeningen)

Stel $EH = 10$ en $GH = x$

Dit leidt tot $x^3 + 200x = 20x^2 + 2000$

Maple zegt: $x = 15,43689013$

Het echte plaatje



Dit was het begin van een onderzoek naar derdegraadsvergelijkingen.

Een klassificatie:

$x^3 = d$	$x^3 + cx = d$	$x^3 + bx^2 + cx = d$
	$x^3 + d = cx$	$x^3 + bx^2 + d = cx$
	$x^3 = cx + d$	$x^3 + cx + d = bx^2$
	$x^3 + bx^2 = d$	$x^3 = bx^2 + cx + d$
	$x^3 + d = bx^2$	$x^3 + bx^2 = cx + d$
	$x^3 = bx^2 + d$	$x^3 + cx = bx^2 + d$
		$x^3 + d = bx^2 + cx$

Oplossen met behulp van kegelsneden.

Het probleem van het punt G :

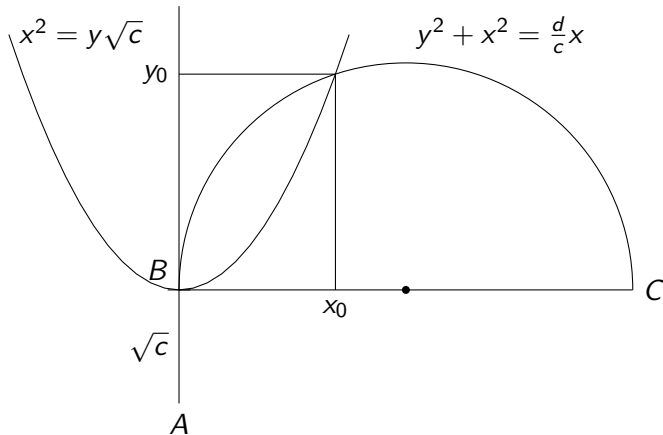
De vergelijking is $x^3 + 200x = 20x^2 + 2000$.

Haal wat buiten de haakjes: $x(x^2 + 200) = 20(x^2 + 100)$.

Neem bijvoorbeeld $y = x^2 + 100$, dan staat er $x(y + 100) = 20y$ en daar hebben we twee kegelsneden: een parabool en een hyperbool.

al-Khayyāmī

Voorbeeld van één van de veertien gevallen: $x^3 + cx = d$.



$$AB = \sqrt{c}$$

$$BC \cdot AB^2 = d, \text{ of}$$

$$BC = d/c$$

Het snijpunt van de parabool en de cirkel geeft ons de oplossing.

Reken maar na:

$$x_0^3 + cx_0 = d$$

Er was wel een probleem.

Bestonden die snijpunten wel?

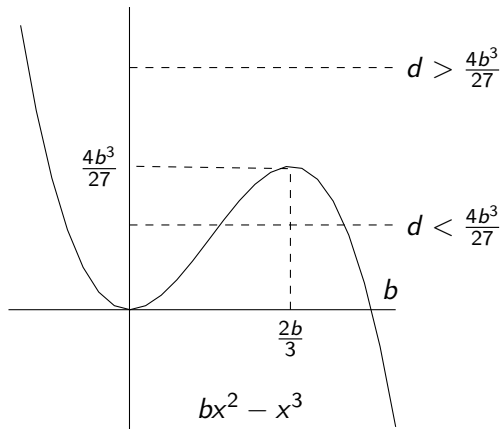
Konden die toch niet meetkundig gemaakt worden?

En hoe moest het algebraïsch?

al-Tusi (†1213)

Kwalitatieve studie: aantal nulpunten van de vergelijking.

Bijvoorbeeld $x^3 + d = bx^2$; bekijk $D = d - \frac{4}{27}b^3$.



Citaat van Omar Khayyam

Als, echter, het onderwerp van het probleem een absoluut getal is, zijn noch wij, noch de anderen die zich met algebra bezig houden, in staat geweest deze vergelijking op te lossen — wellicht zullen degenen die na ons komen in staat zijn dit gat te vullen.

Dat moest dus wachten tot de zestiende eeuw.