

Doorbraak in Italië

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Leiden, 22 april 2025

Dramatis Personae

- ▶ Scipione del Ferro (1465–1526)
- ▶ Antonio Maria Fiore (eerste helft zestiende eeuw)
- ▶ Annibale dele Nave (1500–1558)
- ▶ Nicolo Tartaglia (1499/1500–1557)
- ▶ Gerolamo Cardano (1501–1576)
- ▶ Ludovico Ferrari (1522–1565)
- ▶ Raphael Bombelli (1526–1572)

Scipione del Ferro

Docent aan de Universiteit van Bologna.

Kende de oplossing van $x^3 = px + q$ maar hield hem geheim.

Waarom?

Wiskundigen daagden elkaar uit met opgaven, en verliezen kon ernstige gevolgen hebben.

Hij hield zijn vondsten bij in een boek met aantekeningen.

Dat gaf hij aan het eind van zijn leven aan zijn schoonzoon en opvolger, Annibale della Nave.

Hij vertelde de oplossing vlak voor zijn dood aan zijn student, Antonio Maria Fiore.

Nicolo Tartaglia



Autodidact, heeft veel gedaan.

1537: *Nova Scientia*. Het eerste werk dat een theorie van kogelbanen ontwikkelde.

1543: Invloedrijke vertalingen van werken van Archimedes, en van *De Elementen*, met commentaar.

1556: *General Trattato di Numeri et Misura*. Een zesdelig encyclopedisch werk (1500 pagina's) over alle aspecten van reken- en meetwerk. Lang een standaardwerk.

1535: Aankondiging van de oplossing van de derdegraadsvergelijking ($x^3 + mx = n$).

Uitdaging van Antonio Fiore met vergelijkingen van die vorm, en Tartaglia antwoordde met $x^3 + mx^2 = n$.

Tartaglia won de wedstrijd.

Gerolamo Cardano



Gravure R. Cooper

Een echte polymath.

Arts, bioloog, astronoom, astroloog, wiskundige, ...

Bedacht (een voorloper van) de cardan-as.

1663: *Liber de Ludo Aleae* (mogelijk geschreven rond 1564). Een van de eerste (misschien het eerste) boek over kansrekening.

1545: *Ars Magna*. Het werk waarin systematisch het oplossen van alle gevallen van de derdegraadsvergelijking uit de doeken wordt gedaan. Latere edities: 1570 en 1663. Hij had van Tartaglia onder belofte van geheimhouding de oplossing gekregen. Deze was niet blij met de publicatie van dit werk.

Waarom toch publicatie?

Anders dan Tartaglia wilde Cardano de kennis van het oplossen van vergelijkingen verspreiden. Na veel zeuren kreeg hij de oplosmethode voor $x^3 + px = q$. En hij beloofde het niet als eerste te publiceren. Dit kreeg hij:

*When the cube and its things near
Add to a new number discrete
Determine two numbers different
By that one; this feat
Will be kept as a rule
Their product always equal, the same,
To the cube of a third
Of the number of things named
Then generally speaking,
The remaining amount
Of the cube roots subtracted
Will be your desired count*

Waarom toch publicatie?

Cardano werkte het gedicht uit en wist voor alle andere gevallen ook een oplossing te geven. En bewijzen dat de methode het juiste antwoord opleverde.

Zijn student, Lodovico Ferrari, kon, met behulp van de methode van Tartaglia, ook vierdegraadsvergelijkingen oplossen.

Toen Cardano en Ferrari bij Annibale della Nave de aantekeningen van Scipione del Ferro in hadden mogen zien wisten ze dat Tartaglia niet de eerste was.

Cardano besloot dat hij ontslagen was van zijn belofte en publiceerde de methode in *Ars Magna*.

Cardano's *Ars Magna*

"Scipio Ferro van Bologna ontdekte deze regel bijna dertig jaar geleden en gaf hem door aan Antonio Maria Fior van Venetië, wiens wedstrijd met Niccolò Tartaglia van Brescia aan Niccolò de gelegenheid gaf deze te ontdekken. Hij [Tartaglia] gaf hem aan mij als reactie op mijn smeekbeden, doch zonder bewijs. Gewapend met deze hulp, zocht ik het bewijs in [diverse] vormen. Dit was erg moeilijk. Hier volgt mijn versie."

Dit staat aan het begin van Hoofdstuk XI:

"De Cubo & rebus equalibus Numero"

Hoofdstukken XI – XXIII behandelen allemaal verschillende gevallen van derdegraadsvergelijkingen.

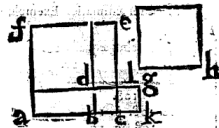
C A P V T XI.

De Cubo & rebus equalibus Numero.

SCIPIO Ferreus Bononiensis iam annis ab hinc triginta ferme capitulum hoc inuenit, tradidit verò Anthonio Mariae Florido Veneto, qui cum in certamen cum Nicolao Tartalea Brixellense aliquando venisset, occasionem dedit, vt Nicolaus inuenerit & ipse, qui cum nobis rogantibus tradidisset, suppressa demonstratione, freti hoc auxilio, demonstrationem quaesiuimus, eamque in modos, quod difficillimum fuit, redactam sic subiiciemus.

DEMONSTRATIO.

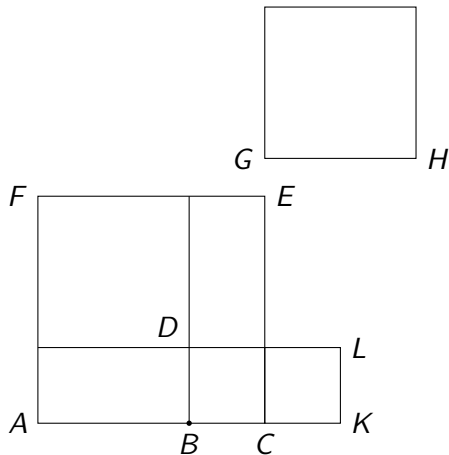
Sit igitur exempli causa cubus $g h$, & sexcuplum lateris $g h$ aequale 20. & ponam duos cubos a^3 & c^3 , quorum differentia sit 20. ita quod productum $a c$ lateris, in



Hoofdstuk XI: de Cubus en Eerste Macht Gelijk aan het Getal

DEMONSTRATIE

Laat bijvoorbeeld GH^3 plus zes maal de zijde GH gelijk zijn aan 20, en laat AE en CL twee kubussen zijn met verschil 20 en zo dat het product van de zijde AC en de zijde CK gelijk is aan 2, zijnde één-derde van de coëfficiënt. Markeer BC gelijk aan CK , ik zeg dat AB gelijk is aan GH en dus de oplossing van de vergelijking want zo hadden we GH genomen. Overeenkomstig de propositie uit Hoofdstuk VI completeer ik de lichamen DA , DC , DE , en DF ; en zoals DC de kubus BC^3 weergeeft, staat DF voor AB^3 , staat DA voor $3(BC \cdot AB^2)$, en DE voor $3(AB \cdot BC^2)$.



Hoofdstuk XI: de Cubus en Eerste Macht Gelijk aan het Getal

Aangezien $AC \cdot CK$ gelijk is aan 2, is $AC \cdot 3CK$ gelijk aan 6; en dus is $AB \cdot 3(AC \cdot CK)$ gelijk aan $6AB$. Dus drie keer het product van AB , BC , en AC is gelijk aan $6AB$.

Het verschil tussen AC^3 en BC^3 — in de gedaante van BC^3 — is 20, en volgens de eerste propositie van hoofdstuk VI gelijk aan de som van de lichamen DA , DE , en DF .

Iets efficiënter dan Cardano: $AC = AB + BC$, dus

$$\begin{aligned} AC^3 &= (AB + BC)^3 = AB^3 + BC^3 + 3AB^2 \cdot BC + 3AB \cdot BC^2 \\ &= AB^3 + BC^3 + 3AB \cdot BC(AB + BC) \\ &= AB^3 + BC^3 + 3AB \cdot BC \cdot AC \\ &= AB^3 + BC^3 + 6AB \end{aligned}$$

Conclusie $AB^3 + 6AB = AC^3 - BC^3 = 20$.

Hoofdstuk XI: de Cubus en Eerste Macht Gelijk aan het Getal

REGEL

Neem de derde macht van één-derde van de coëfficiënt van x ; tel daarbij op het kwadraat van de helft van de constante in de vergelijking; en neem de vierkantswortel van het geheel.

Dupliceer dit en tel bij de ene de helft van de constante op en trek van de andere de helft van de constante af. Je hebt een *binomium* en zijn *apotome*.

Dan, na aftrekken van de derdemachtswortel van het apotome van de derdemachtswortel van het binomium, is de rest die overblijft de waarde van x .

Bijvoorbeeld $x^3 + 6x = 20$.

Neem de derde macht van 2, één-derde van 6, dat is 8; kwadrateer 10, de helft van de constante; het resultaat is 100. Tel 100 en 8 op, dat geeft 108, de wortel daarvan is $\sqrt{108}$. Dupliceer deze; tel 10 bij de ene op, en trek die van de andere af.

Je hebt het binomium $\sqrt{108} + 10$ en zijn apotome $\sqrt{108} - 10$. Trek hun derdemachtswortels van elkaar af en je hebt de waarde van x :

$$\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

Hoofdstuk XI: de Cubus en Eerste Macht Gelijk aan het Getal

Waar komt de regel vandaan?

Uit eerdere hoofdstukken, waar veel over tweedegraadsvergelijkingen te vinden is.

In het bijzonder het vinden van getallen met gegeven som/verschil p , en product q .

In dit geval het verschil: $x - y = p$ en $xy = q$ geeft de vergelijking $x(x - p) = q$, en dus $x^2 - px = q$, of $(x - \frac{1}{2}p)^2 = q + (\frac{1}{2}p)^2$.

Met oplossing

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}p\right)^2 + q} + \frac{1}{2}p \text{ en } y = x - p = \sqrt{\left(\frac{1}{2}p\right)^2 + q} - \frac{1}{2}p.$$

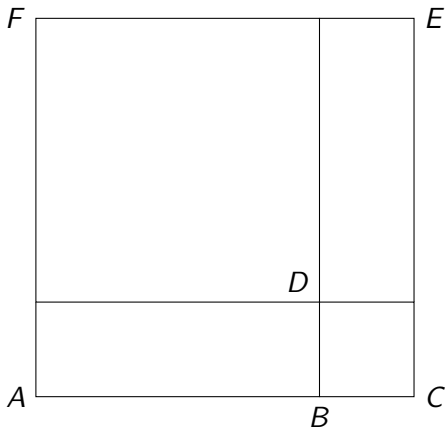
Bij $x^3 + 6x = 20$ moesten we AC en CK vinden zó dat $AC^3 - CK^3 = 20$, en $AC \cdot CK = \frac{1}{3} \cdot 6$, en dus $AC^3 \cdot CK^3 = (\frac{1}{3} \cdot 6)^3$.

De formules hierboven geven $AC^3 = \sqrt{108} + 10$ en $CK^3 = \sqrt{108} - 10$.

Hoofdstuk XII: de Cubus Gelijk aan de Eerste Macht en het Getal

DEMONSTRATIE

Laat DC en DF twee kubussen zijn waarvan het product van de zijden, AB en BC , gelijk is aan één-derde van de coëfficiënt van x , en laat de som van de cubussen gelijk zijn aan de constante. Ik zeg dat AC de waarde van x is. Omdat $AB \cdot BC$ gelijk is aan één-derde van de coëfficiënt, is $3(AB \cdot BC)$ gelijk aan die coëfficiënt, en het product van AC en $3(AB \cdot BC)$ is gelijk aan de hele eerste macht. Want we nemen aan dat AC gelijk is aan x . Maar $AC \cdot 3(AB \cdot BC)$ is gelijk aan zes lichamen, drie daarvan zijn $AB \cdot BC^2$ en de andere drie zijn $BC \cdot AB^2$.



Hoofdstuk XII: de Cubus Gelijk aan de Eerste Macht en het Getal

Dus deze zes lichamen zijn gelijk aan de hele eerste macht en samen met de kubussen DF en DC vormen ze de kubus AE .

De kubussen DF en DC zijn ook gelijk aan de constante.

Daarom is de kubus AE gelijk aan de eerste macht en het getal.

Cardano bewijst dan nog dat $3AC \cdot (AB \cdot BC)$ gelijk is aan de zes lichamen, in een lang verhaal dat de distributieve wet toegepast op $3(AB + AC)(AB \cdot BC)$.

Hoofdstuk XII: de Cubus Gelijk aan de Eerste Macht en het Getal

REGEL

The regel is derhalve: Als de derde macht van één-derde van de coëfficiënt van x niet groter is dan het kwadraat van de helft van het getal, trek dan de eerste van de tweede af, en tel de vierkantswortel van het verschil op bij de helft van het getal en trek het ook een keer van die helft af.

Je hebt een *binomium* en zijn *apotome*, de som van hun derdemachtswortels is de waarde van x .

Bijvoorbeeld $x^3 = 6x + 40$.

Neem de derde macht van 2, één-derde van 6, dat is 8; trek dit af van 400, het kwadraat van 20, de helft van het getal; het resultaat is 392. De vierkantswortel hiervan opgeteld bij 20 geeft $20 + \sqrt{392}$ en ervan afgetrokken geeft $20 - \sqrt{392}$.

De som van de derdemachtswortels van deze, $\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$, is de waarde van x .

Hoofdstukken XIII–XXIII

Elf hoofdstukken waarin alle overgebleven gevallen worden behandeld (zie de lijst van Omar Khayyam).

Meestal door terugbrengen tot de twee gevallen die we gezien hebben. En allemaal met hun eigen regel.

Het wordt tijd het wat moderner te doen.

De Derdegraadsvergelijking, in één keer

De vergelijking is $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Stap 1: werk de kwadratische term weg.

Stel $x = y - \frac{1}{3}a$ en vul in:

$$\left(y - \frac{1}{3}a\right)^3 + a\left(y - \frac{1}{3}a\right)^2 + b\left(y - \frac{1}{3}a\right) + c$$

wordt

$$y^3 + \left(-\frac{1}{3}a^2 + b\right)y + \frac{2}{9}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$$

We krijgen zo

$$y^3 = \left(\frac{1}{3}a^2 - b\right)y + \frac{1}{3}ab - \frac{2}{9}a^3 - c$$

De Derdegraadsvergelijking, de algemene methode

Stap 2: De vergelijking is nu van de vorm $y^3 = py + q$ (Hoofdstuk XII).

Substitueer: $y = u + v$.

Omdat $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = 3uv(u + v) + u^3 + v^3$, komen we via

$$3uv(u + v) + u^3 + v^3 = p(u + v) + q$$

op de voorwaarden van Cardano: *als $u^3 + v^3 = q$ en $uv = \frac{1}{3}p$ dan is $u + v$ een oplossing van de vergelijking $y^3 = py + q$.*

De Derdegraadsvergelijking, de algemene methode

Als we dus u en v kunnen vinden zó dat $u^3 + v^3 = q$ en $u^3 \cdot v^3 = \frac{1}{27}p^3$ dan is $u + v$ een oplossing van de $y^3 = py + q$.

Maar we weten hoe u^3 en v^3 te vinden: als oplossingen van

$$t^2 - qt + \frac{1}{27}p^3 = 0$$

Immers: $(t - u^3)(t - v^3) = t^2 - (u^3 + v^3)t + u^3 \cdot v^3 = t^2 - qt + \frac{1}{27}p^3$.

De Derdegraadsvergelijking, de algemene methode

De oplossingen van $t^2 - qt + \frac{1}{27}p^3 = 0$ zijn

$$\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3} \text{ en } \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$$

Dus een oplossing van $y^3 = py + q$ is

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$$

Herinner: $p = \frac{1}{3}a^2 - b$ en $q = \frac{1}{3}ab - \frac{2}{9}a^3 - c$, en ook nog $x = y - \frac{1}{3}a$.

(Ik ken de formules dus niet uit het hoofd. De methode wel.)

Opmerkingen

Bij Cardano waren alle coëfficiënten niet-negatief, en de oplossingen ook.

In een later hoofdstuk komt hij daarop terug:

Wat te doen als negatieve dingen niet te vermijden zijn?

Wij komen daar ook op terug.

Opmerkingen

In hoofdstuk XII staat bij de REGEL, vertaald naar de moderne situatie:

“Als $(\frac{1}{3}p)^3$ niet groter is dan $(\frac{1}{2}q)^2$ dan ...”

Dat voorbehoud is logisch, want we moeten de vierkantswortel kunnen trekken.

In hoofdstuk XI staat dat voorbehoud niet, waarom?

Omdat de positieve grootheden $(\frac{1}{3}p)^3$ en $(\frac{1}{2}q)^2$ opgeteld worden.

Verder is $x^3 + px$ strict stijgend en bestrijkt de uitdrukking het hele interval $[0, \infty)$ (als $x \geq 0$ natuurlijk).

Dus $x^3 + px = q$ heeft altijd precies één niet-negatieve oplossing.

Bij $x^3 + 6x = 20$ vonden we $\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$ als oplossing, maar met een scheef oog zien we dan 2 ook een oplossing is.

Conclusie:

$$\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10} = 2$$

Opmerkingen

Iets dergelijks geldt bij de oplossing van $x^3 = 6x + 40$. De voor de hand liggende oplossing is 4.

Bombelli wist $\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$ om te bouwen tot 4.

Als je $\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}}$ als $a + \sqrt{b}$ probeert te schrijven moet ook $\sqrt[3]{20 - \sqrt{392}} = a - \sqrt{b}$ gelden. Vermenigvuldig: $a^2 - b = (a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = \sqrt[3]{400 - 392} = \sqrt[3]{8} = 2$.

En via $(a + \sqrt{b})^3 = 20 + \sqrt{392}$ kom je op $a^3 + 3ab = 20$.

De enige gehele waarde voor a is 2; dan geven beide vergelijkingen $b = 2$.

Conclusie: $\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} = 2 + \sqrt{2}$ en $\sqrt[3]{20 - \sqrt{392}} = 2 - \sqrt{2}$.

Onze oplossing is dus inderdaad gelijk aan $2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$.

Probeer zelf $\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$ om te bouwen tot 2.

De Vierdegraadsvergelijking

Oplossing van $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$:

Stap 1: Substitueer $x = y - \frac{1}{4}a$ en breng de vergelijking in de vorm

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

Namelijk

$$x^4 + \left(b - \frac{3}{8}a^2\right)x^2 + \left(\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{2}ba + c\right)x + \left(-\frac{3}{256}a^4 + \frac{1}{16}ba^2 - \frac{1}{4}ca + d\right) = 0$$

De Vierdegraadsvergelijking

Stap 2: We gaan de vergelijking nog wat meer ombouwen. Neem een hulpvariable y en werk $(x^2 + y)$ uit.

$$\begin{aligned}(x^2 + y)^2 &= x^4 + 2x^2y + y^2 \\ &= -px^2 - qx - r + 2x^2y + y^2 \\ &= (2y - p)x^2 - qx + (y^2 - r).\end{aligned}$$

De Vierdegraadsvergelijking

Stap 3: Links staat een kwadraat. Om rechts ook een kwadraat te krijgen passen we de Mesopotamische truc toe: vermenigvuldig met $2y - p$ en splits kwadraat af.

$$((2y-p)x)^2 - q(2y-p)x + (2y-p)(y^2-r) = \left((2y-p)x - \frac{1}{2}q \right)^2 - \frac{1}{4}q^2 + (2y-p)(y^2-r)$$

Dit is een kwadraat als $-\frac{1}{4}q^2 + (2y-p)(y^2-r) = 0$, ofwel als

$$2y^3 - py^2 + 2ry + pr - \frac{1}{4}q^2 = 0$$

Dat is een derdegraadsvergelijking in y .

De Vierdegraadsvergelijking

Stap 4: Los $2y^3 - py^2 + 2ry + pr - \frac{1}{4}q^2 = 0$ op, en stel y gelijk aan een oplossing.
Als we de extra factor $2y - p$ weer wegdelen krijgen we

$$\begin{aligned}(x^2 + y)^2 &= (2y - p)x^2 - qx + (y^2 - r) \\ &= A(x - B)^2\end{aligned}$$

met

$$A = 2y - p \text{ en } B = \frac{q}{2(2y - p)}$$

De Vierdegraadsvergelijking

Stap 5: Los de beide tweedegraadsvergelijkingen

$$x^2 + y = \sqrt{A}(x - B) \text{ en } x^2 + y = -\sqrt{A}(x - B)$$

op naar x .

Als je zorgvuldig boekhoudt kun je uiteindelijk x uitdrukken in p , q , en r .

En dan ook de oplossing(en) van de oorspronkelijke vergelijking in a , b , c , en d .

We zien dat er een formule is, zonder hem echt op te schrijven ...