

Complexe getallen en een nieuwe aanpak

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Leiden, 29 april 2025

Cardano zelf

In hoofdstuk XXXVII bekijkt hij gevallen waarin negatieve oplossingen ook opduiken. Kwadratische vergelijkingen met negatieve oplossingen komen vaak genoeg voor om ook als ‘echte’ problemen te tellen.

Maar er zijn ook problemen die tot een vierkantswortel van een negatief getal leiden. Bijvoorbeeld: verdeel 10 in twee delen, met product 30 of 40.

“Het is duidelijk dat het onmogelijk is. Desalniettemin gaan we als volgt te werk . . .”
Verdeel 10 in twee gelijke delen, elk 5. Die kwadrateren we, dat geeft 25.

Trek daar 40 van af, zoals eerder uitgelegd, met -15 als rest.

De vierkantswortel daarvan tellen we op bij en trekken we af van 5, met als resultaat $5 + \sqrt{-15}$ en $5 - \sqrt{-15}$.

Dat verdeelt 10 in twee delen, met product 40.

Aan het eind van een bewijs hiervan schrijft hij: “Zo schrijdt de rekenkundige subtiliteit voort, het eind daarvan is, als gezegd wordt, net zo verfijnt als het nutteloos is.”

Rafael Bombelli

Schreef een heel dik boek: *L'Algebra* (drie delen, in het Italiaans).

Hierin legde hij heel precies uit hoe algebra te bedrijven.

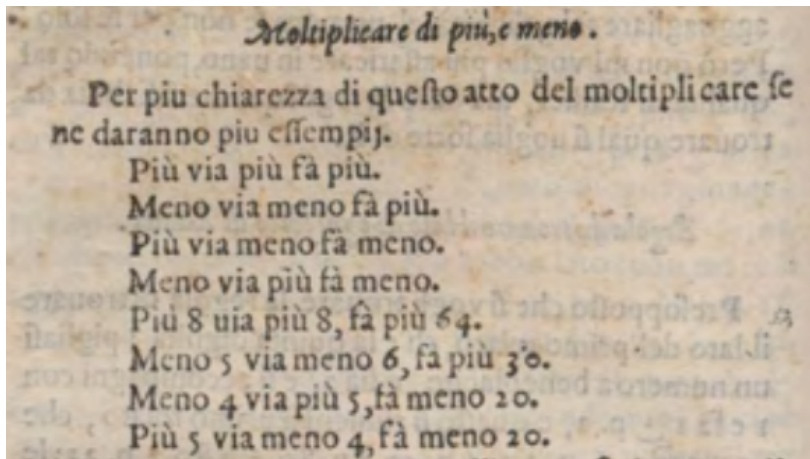
Hij was ontevreden over de bestaande boeken en wilde het zo opschrijven dat iedereen het kon begrijpen.

Gaf ook namen aan diverse machten en gaf van elk precieze definities: numero quadrato, numero cubo, numero quadroquadrato, ...

En heel veel voorbeelden.

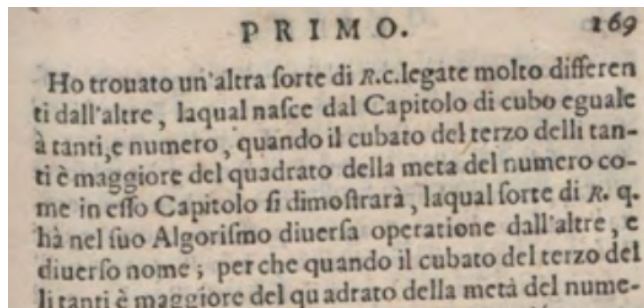
Rafael Bombelli: L'Algebra

En hier en daar een 'gedichtje' om de regels te helpen onthouden.



Rafael Bombelli: L'Algebra

Op bladzijde 169 komt zijn grote uitvinding.



Rafael Bombelli: L'Algebra

Hij legt uit dat er bij het oplossen van $x^3 = px + q$ gevallen zijn, namelijk als $(\frac{1}{3}p)^3 > (\frac{1}{2}q)^2$, waar het nemen van derdemachtswortels anders gaat.

Herinner: in de formule kwam $\sqrt{(\frac{1}{2}q)^2 - (\frac{1}{3}p)^2}$ voor:

$$u^3 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 - \left(\frac{1}{3}p\right)^3} \text{ en } v^3 = -\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 - \left(\frac{1}{3}p\right)^3}$$

Dit is problematisch als $(\frac{1}{3}p)^3 > (\frac{1}{2}q)^2$.

Rafael Bombelli: L'Algebra

Bombelli: maar hier moeten we toch mee doorrekenen.

Notatie:

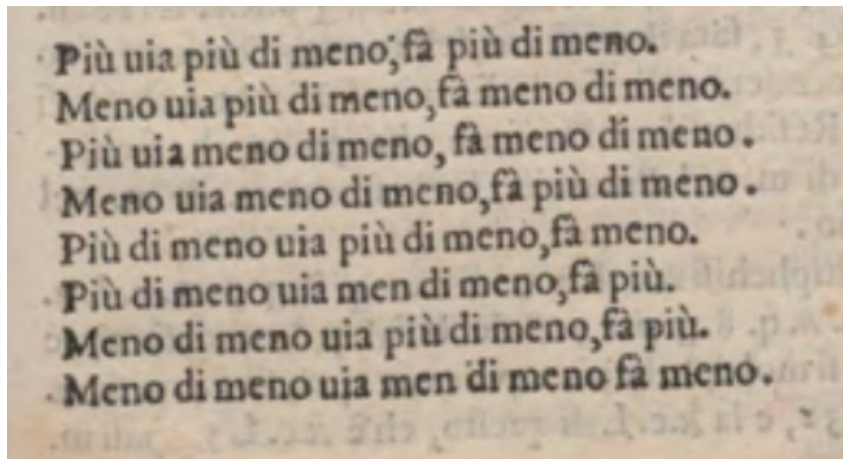
- ▶ “p. di m. 3” voor $3\sqrt{-1}$ (più di meno), en
- ▶ “m. di m. 3” voor $-3\sqrt{-1}$ (meno di meno)

Dan volgen 30 bladzijden waarop het rekenen met deze nieuwe ‘getallen’ uitvoerig wordt uitgelegd.

En, weer, heel precies.

Rafael Bombelli: L'Algebra

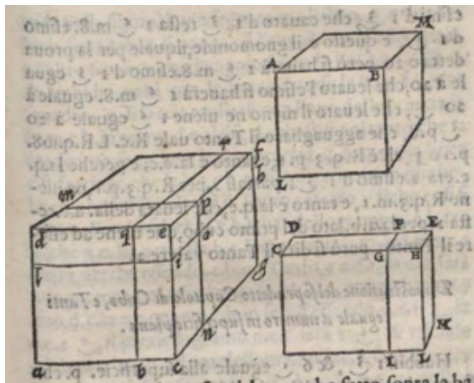
Met een gedichtje:



Rafael Bombelli: derdegraadsvergelijking

In boek 2 van *L'Algebra* wordt duidelijk waarom dit allemaal nodig is.

Hij geeft een uitgebreide behandeling van de oplosmethoden die we gezien hebben, met onder meer betere plaatjes dan die van Cardano:



Rafael Bombelli ($x^3 = 15x + 4$)

Op pagina 293 staat een voorbeeld waar de methode van Cardano stuk lijkt te lopen.

In moderne termen: los op $x^3 = 15x + 4$.

Cardano's methode uit hoofdstuk XII volgend nemen we het kwadraat van de helft van 4 en trekken daar de derde macht van één-derde van 15 van af; van het resultaat, $2^2 - 5^3 = -121$, nemen we de vierkantswortel en tellen die op bij, en trekken die af van 2. De uiteindelijke oplossing is

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Hier stopt de trein.

Maar met een scheef oog zie je zo de oplossing $x = 4$ (want $64 = 60 + 4$).

Bombelli kon met zijn nieuwe getallen de trein verder laten rijden.

Rafael Bombelli ($x^3 = 15x + 4$)

Ancora si può procedere nella agguagliatione di tal Capitolo in questa guisa. Agguagliasi 15 à 15 p. 4 , piglisi il terzo delli Tanti, che è 5 , cubisi fa 125 , e questo si caui del quadrato della metà del numero, ch'è 4 , resta m. 121 (ilqual si chiamerà più di meno) che di questo pigliata la R. q. sarà p. di m. 11 , che aggiunta con la metà del numero, fa 1 p. di m. 11 , che pigliatone il lato cubico, ed'aggiunto col suo residuo, fa 2 p. di m. 1 . & 2 m. di m. 1 , che giunti insieme fanno 4 , e 4 , è la ualuta del Tanto. Et benchè à molti parerà questa cosa strana, perche di questa opinione fui ancho già vn tempo parendomi più tosto fosse sofistica, che uerrà, nondimeno

15 Egualè 15 . p. 4 .
 5 . 2 .
 5 . 2 .
 25 . 4 .
 5 . 125 .
 125 . R. q. p. di m. 11 .
Somma R. q. p. di m. 11 . Resta R. q. p. di m. 121 .
R. c. L. 1 p. di m. 11 . R. c. L. 2 m. di m. 11 .
Lato 1 p. di m. 1 . 2 m. di m. 1 .
Sommati fanno 4 . che è la ualuta del Tanto.

Bombelli's oplossing van $x^3 = 15x + 4$.

Rafael Bombelli ($x^3 = 15x + 4$)

Ancora si può procedere nella equatione di questo Capitolo in un altro modo, come se si hauesse ad agguagliare x^3 a $15x + 4$ pigliasi il terzo de le cose, che è 5 rubasi fa 125. et questo si caua del quadrato della metà del numero che è 4; resterà 0 m. 121, che di questo pigliata la Radice, dirà 3, 10 m. 121, che ag-
 giunta con la metà del numero, farà
 Eguale a 16 p. 4 a p. 3, 10 m. 121, che pigliata con l'ore-
 ator cubico, et aggiunto col suo residuo
 farà 3, 12 p. 3, 10 m. 121, p. 3, 12 a m. 3, 10 m. 121,
 et tanto uale la cosa. Et benché questo modo si
 possa più tosto chiamar sofisticato, che aliterum
 come fu detto innanti nel Capitolo
 di Consi, et Nro eguale a cose,
 che pure nell'operatione serue
 senza difficoltà niuna, et assue-
 uolte si troua la ualuta de la
 cosa per numero, come questo, che
 ha creatore; che il Creatore di
 3, 12 p. 3, 10 m. 121, sarà 12 p. 3, 10 m. 1, che aggiunto col suo residuo, che è
 a m. 3, 10 m. 1, che aggiunto insieme fanno 4, che è la ualuta de la cosa.

Uit de inleiding van een (posthume) heruitgave van boeken IV en V van L'Algebra.

Rafael Bombelli ($x^3 = 15x + 4$)

Wat daar gebeurt is dat hij de derdemachtswortels van $2 p$ p. di m. 11 en $2 p$ m. di m. 11, dat wil zeggen van $2 + \sqrt{-121} = 2 + 11\sqrt{-1}$ en $2 - \sqrt{-121} = 2 - 11\sqrt{-1}$, bepaalt.

Op ongeveer dezelfde manier als eerder: probeer $a + b\sqrt{-1}$ en $a - b\sqrt{-1}$. Hun product is $a^2 + b^2$ en ook gelijk aan $\sqrt[3]{125} = 5$.

De derde macht is $(a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)\sqrt{-1}$, dus we vinden ook $a^3 - 3ab^2 = 2$ en $3a^2b - b^3 = 11$.

Bombelli probeerde waarschijnlijk alleen gehele a en b , en dan volgt snel $a = 2$ en $b = 1$.

Conclusie: $\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1}$ en $\sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1}$.

De som van die twee is de oplossing die we al zagen: 4.

En zo zijn de complexe getallen geboren.

Notatie

François Viète ontwikkelde notatie voor vergelijkingen met algemene coëfficiënten.

In Viètes notatie: de oplossing van

$$A \text{ quad} + B^2 \text{ in } A \text{ equalis } Z \text{ plane}$$

is

$$A \text{ is } \ell. \overline{Z \text{ plane} + B \text{ quad}} - B$$

De oplossing van $A^2 + 2bA = z$ is $\sqrt{z + b^2} - b$



Bij Viète moesten de dimensies kloppen: A^2 en $2bA$ zijn tweedimensionaal, en Z daarom ook: “ Z plane”.

Zie *De aequationum — recognitione et emendatione tractatus duo*

Derdegraadsvergelijking

Het moeilijke geval: $x^3 = px + q$, met $(\frac{1}{2}q)^2 < (\frac{1}{3}p)^3$.

Viète maakte de dimensies kloppend: $x^3 = 3b^2x + b^2d$, met als gevolg $(\frac{1}{2}b^2d)^2 < (b^2)^3$, ofwel $d < 2b$.

Viète had eerder afgeleid dat $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$.

Of ook:

$$\cos^3 \alpha = \frac{3}{4} \cos \alpha + \frac{1}{4} \cos 3\alpha.$$

Substitueer $x = r \cos \alpha$ in de vergelijking: $r^3 \cos^3 \alpha - 3b^2 r \cos \alpha = b^2 d$, of

$$\cos^3 \alpha = \frac{3b^2}{r^2} \cos \alpha + \frac{b^2 d}{r^3}$$

Nu vergelijken ...

Derdegraadsvergelijking

... gelijke coëfficiënten bij $\cos \alpha$, dus $\frac{3b^2}{r^2} = \frac{3}{4}$, ofwel $r = 2b$.

Gelijke constanten: $\frac{1}{4} \cos 3\alpha = \frac{b^2 d}{r^3} = \frac{b^2 d}{8b^3}$, en dat geeft $\cos 3\alpha = \frac{d}{2b}$.

En dat kan want $d < 2b$.

Dus: als $r = 2b$ en $\cos 3\alpha = \frac{d}{2b}$ dan is $x = r \cos \alpha$ een oplossing van $x^3 = px + q$.

NB $b = \sqrt{\frac{1}{3}p}$ en $d = \frac{3q}{p}$.

Voor $x^3 = 15x + 4$ krijgen we $b = \sqrt{5}$, en $d = \frac{4}{5}$.

En dat geeft weer $r = 2\sqrt{5}$, en $\cos 3\alpha = \frac{2}{5\sqrt{5}}$.

Dat geeft

$$x = 2\sqrt{5} \cdot \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{2}{5\sqrt{5}} \right) \right)$$

als oplossing. En ja, dat is gelijk aan 4.

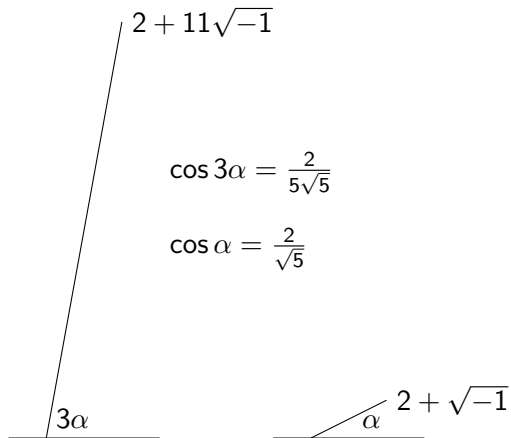
Derdegraadsvergelijking

Dit is niet zo gek als het (misschien) lijkt.

In de complexe getallen komt het trekken van derdemachtswortels neer op, onder meer, een hoek in drieën delen.

Het antwoord van Viète is wat men via de complexe getallen zou krijgen.

Derdegraadsvergelijking



Twee variabelen

We hebben al vaak $(x - t_1)(x - t_2) = x^2 - (t_1 + t_2)x + t_1 t_2$ gebruikt.
Dus krijgen we voor $x^2 - ax + b$, met nulpunten t_1 en t_2 :

$$t_1 + t_2 = a$$

$$t_1 t_2 = b$$

Maar we kunnen ook andere uitdrukkingen in t_1 en t_2 in a en b uitdrukken, bijvoorbeeld

$$t_1^2 + t_2^2 = (t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2 = a^2 - 2b$$

$$(t_1 - t_2)^2 = t_1^2 + t_2^2 - 2t_1 t_2 = a^2 - 4b$$

Probeer zelf $t_1^2 t_2 + t_1 t_2^2$ en $t_1^3 + t_2^3$ in a en b uit te drukken.

Alle polynomen in t_1 en t_2 die *symmetrisch* zijn, zijn als polynomen in $t_1 + t_2$ en $t_1 t_2$ uit te drukken.

Symmetrisch: bij verwisselen van t_1 en t_2 verandert er niets.

Newton, *Arithmetica Universalis* (1707)

Newton deed dit voor alle graden. Hier zijn de resultaten voor een derdegraadspolynoom $x^3 - ax^2 + bx - c$ met nulpunten t_1 , t_2 , en t_3 :

$$t_1 + t_2 + t_3 = a$$

$$t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = b$$

$$t_1 t_2 t_3 = c$$

$$t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = a^2 - 2b$$

$$t_1^2 t_2 + t_2^2 t_3 + t_3^2 t_1 = ab - 3c$$

$$t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 = a^3 - 3ab + 3c$$

$$t_1^4 + t_2^4 + t_3^4 = a^2 - 4a^2 b + 2b^2 + 4ac$$

enzovoort, enzovoort, ...

Elementaire Symmetrische polynomen

Nogmaals: $(x - t_1)(x - t_2)(x - t_3)$ uitwerken geeft

$$x^3 - (t_1 + t_2 + t_3)x^2 + (t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1)x - t_1 t_2 t_3$$

Deze drie zijn dus belangrijk

$$t_1 + t_2 + t_3 = a$$

$$t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = b$$

$$t_1 t_2 t_3 = c$$

dit zijn de **elementaire symmetrische polynomen** van graad 1, 2, en 3 in t_1 , t_2 , en t_3 .

We korten ze, waar nodig, vaak af als s_1 , s_2 , en s_3 .

Elementaire Symmetrische polynomen

Algemeen:

- ▶ $t_1 + t_2 + \cdots + t_n,$
- ▶ $t_1 t_2 + t_1 t_3 + \cdots + t_2 t_n + t_2 t_3 + \cdots + t_2 t_n + \cdots + t_{n-1} t_n,$
- ▶ $t_1 t_2 t_3 + \cdots + t_{n-2} t_{n-1} t_n,$
- ▶ $\dots$
- ▶ $t_1 t_2 t_3 \cdots t_n$

zijn de elementaire polynomen in t_1 tot en met t_n van graad 1 tot en met n .

En als t_1 tot en met t_n de nulpunten van $x^n - s_1 x^{n-1} + s_2 x^{n-2} + \cdots + (-1)^n s_n$ zijn gelden, als eerder,

- ▶ $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = s_1,$
- ▶ $t_1 t_2 + t_1 t_3 + \cdots + t_{n-1} t_n = s_2, \dots$
- ▶ $t_1 t_2 \cdots t_n = s_n.$

Albert Girard (1595–1632)

In *Invention nouvelle en l'algèbre* uit 1629 beschreef hij de elementaire symmetrische polynomen (hij noemde ze *factions*).

1. de eerste faction is de som
2. de tweede faction is de som van alle twee-bij-tweeproducten
3. de derde faction is de som van alle drie-bij-drieproducten
4. enzovoort
5. er zijn net zoveel factions als er getallen zijn
6. aantal termen per faction: zie de bijbehorende rij in de driehoek van Pascal

Albert Girard (1595–1632)

Hoofdstelling van de Algebra

Elke algebraïsche vergelijking heeft net zoveel oplossingen als de exponent van de hoogste hoeveelheid aangeeft. En de eerste faction van de oplossingen is de coëfficiënt van de tweede hoogste hoeveelheid; de hun tweede faction is de coëfficiënt van de derde hoogste hoeveelheid; de derde die van de vierde hoogste, enzovoort, zó dat de laatste faction gelijk is aan de constante term — waarbij de tekens alterneren.

Hij wist dat oplossingen meervoudig kunnen voorkomen, en dat ‘imaginaire’ oplossingen ook meegeteld moesten worden (hij noemde ze ‘onmogelijk’).

Voorbeeld: $x^4 - 4x + 3 = 0$. De factions zijn 0, 0, 4, en 3. Verder is 1 een dubbele oplossing, en de andere oplossingen zijn $-1 \pm \sqrt{-2}$.

Albert Girard (1595–1632)

Op de vraag naar de waarde van die 'onmogelijke' oplossingen: ze zijn goed voor drie dingen, te weten

1. de geldigheid van de algemene regel
2. om zeker te zijn dat er geen andere oplossingen zijn
3. voor het nut

De Hoofdstelling van de Algebra is (pas) aan het eind van de 18de eeuw door Gauss bewezen.

Symmetrische polynomen

Stelling

Elk symmetrisch polynoom is te schrijven als een polynoom in elementaire symmetrische polynomen.

Voorbeeld

Het polynoom $(t_1 - t_2)^2(t_1 - t_3)^2(t_2 - t_3)^2$ is symmetrisch, en gelijk aan

$$s_1^2 s_2^2 - 4s_2^3 - 4s_1^3 s_3 - 27s_3^2 + 18s_1 s_2 s_3$$

Een mooie polynomiale uitdrukking, nietwaar (overgeschreven van Van der Waerden).

Nou èn?

Discriminant

We hadden bij $x^2 - ax + b = 0$ de gelijkheid $(t_1 - t_2)^2 = a^2 - 4b$.

Nu hebben we bij $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ (met oplossingen t_1 , t_2 , en t_3) de gelijkheid

$$(t_1 - t_2)^2(t_1 - t_3)^2(t_2 - t_3)^2 = a^2b^2 - 4b^3 - 4a^3c - 27c^2 + 18abc$$

In beide gevallen heet het product de discriminant van de vergelijking: hij geeft aan of er samenvallende oplossingen zijn.

(De uitdrukking van al-Tusi van 15 april komt van deze discriminant.)

Maar deze stelling geeft ook een manier aan om (min of meer) systematisch op zoek te gaan naar oplosformules voor polynoomvergelijkingen.

Lagrange

Wat volgt is een moderne versie van wat Lagrange deed in *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*.

Dat was een diepgaande studie van het oplossen van polynoomvergelijkingen door middel van symmetrische polynomen.

Het lukte Lagrange niet de vijfdegraadsvergelijking op te lossen, maar het werk legde het fundament voor de bewijzen van de onmogelijkheid daarvan door Ruffini en Abel, en de algemenere theorie ontwikkeld door Galois.

Tweedegraads

We hebben $x^2 - ax + b = 0$.

We weten dat voor de oplossingen geldt: $t_1 + t_2 = a$ en $t_1 t_2 = b$.

Het polynoom $(t_1 - t_2)^2$ is symmetrisch en dus te schrijven als een polynoom in a en b , zeg $p(a, b)$.

Dan hebben we $t_1 - t_2 = \sqrt{p(a, b)}$ en samen met $t_1 + t_2 = a$ levert dit

$$t_1 = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{p(a, b)} \text{ en } t_2 = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{p(a, b)}$$

Verschil met abc -formule: een bewijs dat er een formule is, zonder er een te geven.

We zagen al dat $(t_1 - t_2)^2 = (t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2 = a^2 - 4b$, dus vinden we $p(a, b) = a^2 - 4b$ en daarmee de bekende formule.