

Wat iedereen over Complexe Functies moet weten II

De krenten uit de pap

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Antwerpen, 19 september 2025

Limieten

De definitie van

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = \beta$$

is als vanouds:

voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat een $\delta > 0$ zó dat voor elke z met $|z - \alpha| < \delta$ geldt dat $|f(z) - \beta| < \varepsilon$.

Continuïteit

Ook de definitie van f is continu in α is de oude:

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = f(\alpha)$$

De *bewijzen* van de rekenregels voor limieten en continuïteit blijven onveranderd.

Wat we *niet* meer hebben: linker- en rechterlimieten, en links- en rechtscontinuïteit.

Immers, z kan nu α van alle kanten naderen, niet alleen langs rechte lijnen maar ook langs allerlei andere krommen die door α gaan.

Dit maakt het moeilijker voor een limiet om te bestaan, maar als hij bestaat is dat dan ook meteen een sterke eigenschap waar veel meer uit te halen is.

Open verzamelingen

Belangrijk voor de Complexe-Functietheorie zijn de domeinen van de functies waar we het over hebben: dat moeten *open* verzamelingen zijn.

Open schijf

Als $\alpha \in \mathbb{C}$ en $r > 0$ dan is

$$\{z : |z - \alpha| < r\}$$

de *open schijf* om α met straal r . Notatie: $B(\alpha, r)$.

Open verzameling

Een deelverzameling U van $\mathbb{C}$ is *open* als voor elke $\alpha \in U$ een $r > 0$ bestaat zó dat $B(\alpha, r) \subseteq U$.

Typisch voor wiskundigen: “open schijf” en “open verzameling” apart definiëren ...

Open verzamelingen

Vraag: Is een open schijf ook een open verzameling?

Leuk dat je het vraagt. Denk er even over na.

We zijn het eens: ja dus.

Een paar voorbeelden.

- ▶ $\mathbb{C}$ zelf
- ▶ de eenheidsschijf $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ en elke andere open schijf dus ook
- ▶ het bovenhalfvlak $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ en ook de andere drie halfvlakken natuurlijk
- ▶ $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, afgekort tot $\mathbb{C}^*$
- ▶ $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ (dat is $\mathbb{C}$ minus de negatieve reële as en 0), notatie $\mathbb{C}^-$

Opgave voor bij het slapen gaan

Ga na dat deze verzamelingen daadwerkelijk open zijn.

De definitie

We beperken ons nu tot functies die op open verzamelingen gedefinieerd zijn.

Definitie

Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ een functie, en laat $\alpha \in U$. We zeggen dat f *differentieerbaar* is in α als

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha}$$

bestaat, en die limiet noteren we dan natuurlijk als $f'(\alpha)$.

Opgaven

Opgave

Voor elke $n \in \mathbb{N}$ is de functie $z \mapsto z^n$ differentieerbaar in elk punt van $\mathbb{C}$, met $z \mapsto nz^{n-1}$ als afgeleide functie.

Opgave

Ga na dat de welbekende rekenregels, som/verschil, product, quotiënt, ketting, ... ook hier gelden en met exact dezelfde bewijzen als in het reële geval.

Conclusie: elk polynoom is differentieerbaar op heel $\mathbb{C}$, en als $n < 0$ dan is $z \mapsto z^n$ differentieerbaar op heel $\mathbb{C}^*$, met afgeleide $z \mapsto nz^{n-1}$.

Een nergens differentieerbare functie

De complex toegevoegde $z \mapsto \bar{z}$ is **nergens differentieerbaar**.

Neem $\alpha \in \mathbb{C}$, met $\alpha = a + bi$ en stel de limiet op

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{(x - yi) - (a - bi)}{(x + yi) - (a + bi)}$$

Reken hem horizontaal uit:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - bi) - (a - bi)}{(x + bi) - (a + bi)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x - a} = 1$$

En reken hem verticaal uit:

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{(a - yi) - (a - bi)}{(a + yi) - (a + bi)} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{-y + b}{y - b} = -1$$

De limiet bestaat dus niet.

Verband met reële differentieerbaarheid

Als $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ een functie is heeft deze een reëel en imaginair deel die we ook als functie van x en y kunnen beschouwen (dankzij Caspar Wessel).

(Bijvoorbeeld toen we lieten zien dat $z \mapsto \bar{z}$ nergens differentieerbaar is.)

Ander voorbeeld

$$z^3 = (x + yi)^3 = x^3 + 3x^2yi + 3x(yi)^2 + (yi)^3 = (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i$$

We schrijven $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ en $v(x, y) = 3x^2y - y^3$.

En algemeen: $f(z) = f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y) \cdot i$.

Verband met reële differentieerbaarheid

We rekenen de horizontale limiet uit (die is gelijk aan $f'(\alpha)$):

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^3 - 3xb^2) + (3x^2b - b^3)i - ((a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3 + 3b^2(x - a) + 3b(x^2 - a^2)i}{x - a} \\ &= (3a^2 + 3b^2) + 6abi \end{aligned}$$

Algemeen komt er

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(u(x, b) - u(a, b)) + (v(x, b) - v(a, b))i}{x - a} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} u(a, b) + \frac{\partial}{\partial x} v(a, b)i \end{aligned}$$

Verband met reële differentieerbaarheid

We rekenen de verticale limiet uit (die is gelijk aan $f'(\alpha)$):

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \lim_{y \rightarrow b} \frac{(a^3 - 3ay^2) + (3a^2y - y^3)i - ((a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i)}{(y - b)i} \\ &= \lim_{y \rightarrow b} \frac{-3a(y^2 - a^2) + (3a^2(y - b) - (y^3 - b^3))i}{(y - b)i} \\ &= \frac{-6ab + (3a^2 - 3b^2)i}{i} \end{aligned}$$

Verband met reële differentieerbaarheid

Algemeen komt er

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(u(a, y) - u(a, b)) + (v(a, y) - v(a, b))i}{(y - b)i} \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial y} u(a, b) + \frac{\partial}{\partial y} v(a, b)i}{i} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} v(a, b) - \frac{\partial}{\partial y} u(a, b)i \end{aligned}$$

Uitleg: $\frac{\partial}{\partial x}$ en $\frac{\partial}{\partial y}$ staan voor de *partiële afgeleiden*: bij $\frac{\partial}{\partial x}$ stelden we y constant (gelijk aan b), differentieerden het resultaat naar x en vulden a in voor x . Idem voor $\frac{\partial}{\partial y}$, met verwisseling van x en y , en a en b .

We schrijven de partiële afgeleiden wat korter op: u_x , u_y , v_x , en v_y .

Verband met reële differentieerbaarheid

Even herhalen:

$$\begin{aligned}f'(\alpha) &= u_x(a, b) + v_x(a, b)i \\ &= v_y(a, b) - u_y(a, b)i\end{aligned}$$

Conclusie:

$$u_x = v_y \quad \text{en} \quad v_x = -u_y$$

Dit zijn de *Cauchy-Riemannvergelijkingen*.

Deze vormen de eerste pijler onder de Complexe-Functietheorie.

De reële en imaginaire delen van een differentieerbare functie zijn dus nauw verbonden. Ze zijn uit elkaar te maken (op een constante na) door differentiëren en primitiveren, **en** langs twee wegen!

$$u \rightarrow u_x \rightarrow v = \int u_x \, dy \quad \text{en} \quad u \rightarrow u_y \rightarrow v = \int -u_y \, dx$$

Reken maar na voor z^3 .

Verband met reële differentieerbaarheid

Stelling

*Een functie $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ is differentieerbaar in α dan en slechts dan als hij in α differentieerbaar is als functie naar $\mathbb{R}^2$ **en** als de partiële afgeleiden van u en v aan de Cauchy-Riemannvergelijkingen voldoen.*

Voor $f(z) = \bar{z}$ geldt $u_x = 1 \neq -1 = v_y$, en dus ...

Opgave

Is er een differentieerbare functie met reëel deel

1. $x^2 - y^2$
2. $x^2 + y^2$
3. xy
4. $x^3 - 2xy^2$
5. $5x + 6y$

Analytische functies

Definitie

Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{C}$, en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ een functie. We noemen f *analytisch* in $\alpha \in U$ als er een $r > 0$ is met $B(\alpha, r) \subseteq U$ en zó dat f differentieerbaar is in elk punt van $B(\alpha, r)$.

We zeggen dat f analytisch is op U als f analytisch is in elk punt van U .

Een functie is dus nooit analytisch in één enkel punt.

Alle polynomen zijn analytisch op heel $\mathbb{C}$.

Rationale functies (quotiënten van polynomen) zijn analytisch op $\mathbb{C}$ behalve in de nulpunten van de noemers.

Is er nog meer?

De exponentiële functie

Als toepassing van de Cauchy-Riemannvergelijkingen laten we zien dat de exponentiële functie analytisch is op $\mathbb{C}$.

De definitie van $\exp(z)$ die vaak gehanteerd wordt is

$$\exp(z) = \exp(x + yi) = \exp(x) \cdot \exp(yi) = \exp(x) \cdot (\cos(y) + i \sin(y))$$

Dit gedraagt zich dankzij Caspar Wessel exponentiëel:

$$\begin{aligned}\exp(z) \cdot \exp(w) &= \exp(x) \cdot \exp(u) \cdot (\cos(y) + i \sin(y)) \cdot (\cos(v) + i \sin(v)) \\ &= \exp(x + u) \cdot (\cos(y + v) + i \sin(y + v)) \\ &= \exp(z + w)\end{aligned}$$

De exponentiële functie

We hebben

$$\exp(x + yi) = \exp(x) \cdot \cos(y) + i \exp(x) \sin(y)$$

met $u(x, y) = \exp(x) \cdot \cos(y)$ en $v(x, y) = \exp(x) \sin(y)$, en dus $u_x = u = v_y$ en $u_y = -v = -v_x$, zien we dat de exponentiële functie reëel differentieerbaar is en aan de Cauchy-Riemannvergelijkingen voldoet.

En verder geldt

$$\exp'(z) = u_x(x, y) + v_x(x, y)i = u(x, y) + v(x, y)i = \exp(z)$$

dus de functie is zijn eigen afgeleide.

$\exp(z)$ is analytisch op $\mathbb{C}$.

Over intervallen

We spreken af: als $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continu is dan is de integraal van f over $[a, b]$ gedefinieerd door

$$\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b u(t) \, dt + i \cdot \int_a^b v(t) \, dt$$

Hier zijn u en v respectievelijk het reële en imaginaire deel van f ; dat wil zeggen $f(t) = u(t) + i \cdot v(t)$.

Krommen

Definitie

Een kromme in $\mathbb{C}$ is een *continue* functie $\kappa : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ die *stuksgewijs glad* is, dat wil zeggen: κ' bestaat en is continu behalve in een eindig aantal punten, in die punten is κ' wel links- en rechtscontinu.

In iets meer woorden: het interval $[a, b]$ is verdeeld in een eindig aantal deelintervallen $[a_i, b_i]$ waarop κ continu is met continue afgeleide.

De *lengte* van κ is gedefinieerd als $L_\kappa = \int_a^b |\kappa'(t)| dt$.

We noemen κ een *gesloten kromme* als $\kappa(a) = \kappa(b)$

Krommen

Wat voorbeelden.

Een recht lijnstuk dat twee punten α en β verbindt.

Gegeven door $\kappa : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, met $\kappa(t) = \alpha + t(\beta - \alpha)$.

Er geldt $\kappa'(t) = \beta - \alpha$ en $L_\kappa = |\beta - \alpha|$. We noteren het lijnstuk vaak als $[\alpha, \beta]$.

Een driehoek met hoekpunten α , β , en γ .

Definieer $\kappa : [0, 3] \rightarrow \mathbb{C}$ door

$$\kappa(t) = \begin{cases} \alpha + t(\beta - \alpha) & 0 \leq t \leq 1 \\ \beta + (t - 1)(\gamma - \beta) & 1 \leq t \leq 2 \\ \gamma + (t - 2)(\alpha - \gamma) & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

Deze functie is echt *stuksgewijs* glad: de afgeleide bestaat en is continu, behalve in $t = 1$ en $t = 2$. De beeldverzameling is de driehoek die we vaak als $[\alpha, \beta, \gamma]$ noteren.

Krommen

Cirkels

Als $\alpha \in \mathbb{C}$ en $r > 0$ definieer dan $\kappa_{\alpha,r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ door $\kappa_{\alpha,r}(t) = \alpha + r \cdot \exp(it)$. Dit is de cirkel om α met straal r .

De *eenheidscirkel* ε is de cirkel $\kappa_{0,1}$; de cirkel om 0 met straal 1 dus.

De driehoeken en cirkels zijn gesloten krommen, de rechte lijnstukken niet.

Herhaling: de kromme is de *functie*, niet de beeldverzameling.

De integraal

De algemene situatie is deze: we hebben een open verzameling U , een (meestal analytische) functie $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, en een kromme $\kappa : [a, b] \rightarrow U$.

Definitie

De *integraal* van f over κ is als volgt gedefinieerd.

$$\int_{\kappa} f(z) \, dz = \int_a^b f(\kappa(t)) \cdot \kappa'(t) \, dt$$

Waarbij de rechterintegraal de som is van de integralen over intervallen waarop κ' continu is.

Opgave

Schrijf $\kappa(t) = x(t) + i \cdot y(t)$ en $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$. Schrijf nu de definitie van de integraal helemaal uit in termen van x , y , u , en v .

De integraal

We rekenen de integralen uit die we echt nodig hebben.

Laat $k \in \mathbb{Z}$. We berekenen $\int_{\varepsilon} z^k dz$, waarbij ε de eenheidscirkel is.

Per definitie geldt

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon} z^k dz &= \int_0^{2\pi} \exp(ikt) \cdot i \exp(it) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \exp((k+1)it) \cdot i dt\end{aligned}$$

Als $k = -1$ dan staat er $\int_0^{2\pi} i dt$ en dat is gelijk aan $2\pi i$.

Als $k \neq -1$ dan staat er

$$\left[\frac{\exp((k+1)it)}{(k+1)i} \cdot i \right]_0^{2\pi}$$

en dat is gelijk aan 0.

De integraal

Samengevat

$$\int_{\varepsilon} z^k \, dz = \begin{cases} 2\pi i & k = -1 \\ 0 & k \neq -1 \end{cases}$$

Opgave

Toon aan dat de uitkomsten ook niet veranderen als we de positie en straal veranderen.
Dus als $\kappa_{\alpha,r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven is door $\kappa_{\alpha,r}(t) = \alpha + r \cdot \exp(it)$ dan geldt eveneens

$$\int_{\kappa_{\alpha,r}} (z - \alpha)^k \, dz = \begin{cases} 2\pi i & k = -1 \\ 0 & k \neq -1 \end{cases}$$

Veel integralen zijn nul

Twee belangrijke gevolgen.

Stelling

Toon aan: als p een polynoom is en κ een cirkel in $\mathbb{C}$ dan geldt $\int_{\kappa} p(z) \, dz = 0$.

Lijkt niet erg opwindend, maar is wel belangrijk.

Maar niet allemaal

De volgende stelling klinkt al een stuk interessanter.

Stelling

*Laat p een polynoom zijn en $\alpha \in \mathbb{C}$. Neem één van de cirkels om α , zeg $\kappa_{\alpha,r}$.
Dan geldt*

$$\int_{\kappa_{\alpha,r}} \frac{p(z)}{z - \alpha} dz = 2\pi i \cdot p(\alpha)$$

Bewijs.

Deel $p(z)$ door $z - \alpha$ met rest: $p(z) = q(z)(z - \alpha) + p(\alpha)$.

De integraal wordt dan

$$\int_{\kappa_{\alpha,r}} q(z) dz + \int_{\kappa_{\alpha,r}} \frac{p(\alpha)}{z - \alpha} dz \quad \square$$

Ons doel

Laten zien dat de opgave en de stelling voor alle analytische functies gelden.

In de syllabus wordt dit netjes uitgewerkt.

Omwille van de tijd plukken we hier alleen de vruchten.

De centrale stelling

Stelling (Cauchy-Goursat-Pringsheim)

*Laat U een open deelverzameling zijn van $\mathbb{C}$ en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ een analytische functie.
Laat verder $[\alpha, \beta, \gamma]$ een driehoek zijn die met zijn binnengebied geheel binnen U ligt.
Dan geldt $\int_{[\alpha, \beta, \gamma]} f(z) \, dz = 0$.*



De eerste vrucht: de Fresnel-integralen

We berekenen $\int_0^\infty \cos x^2 dx$ en $\int_0^\infty \sin x^2 dx$

Dat wil zeggen: we (moeten) laten zien dat

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \cos x^2 dx \text{ en } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \sin x^2 dx$$

bestaan, en de waarden van die limieten bepalen.

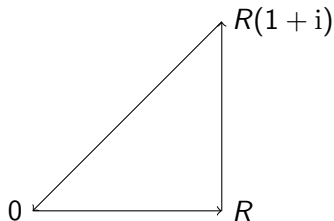
De eerste vrucht: de Fresnel-integralen

Eerste opmerking: $\exp(ix^2) = \cos x^2 + i \sin x^2$.

Dus

$$\int_{[0,R]} \exp(ix^2) dz = \int_0^R \cos x^2 + i \sin x^2 dx$$

Completeer $[0, R]$ tot een driehoek κ_R



De eerste vrucht: de Fresnel-integralen

De integraal van $\exp(iz^2)$ over de driehoek κ_R is gelijk aan 0.

En gelijk aan de som van de integralen over de drie zijden.

Die over de basis geeft ons wat we willen hebben.

Die over $[r, R(1 + i)]$ is gelijk aan

$$\int_0^R \exp(i(R + iy)^2) \cdot i \, dy = i \cdot \int_0^R \exp(i(R^2 - y^2) - 2Ry) \, dy$$

Die over de hypotenusa $[R(1 + i), 0]$ (let op de richting) is gelijk aan

$$\int_{R\sqrt{2}}^0 e^{-x^2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + i) \, dx = -\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \int_0^{R\sqrt{2}} e^{-x^2} \, dx$$

De eerste vrucht: de Fresnel-integralen

De derde integraal heeft een bekende limiet: $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

Once when lecturing to a class he [Lord Kelvin] used the word “mathematician,” and then interrupting himself asked his class: “Do you know what a mathematician is?” Stepping to the blackboard he wrote upon it:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Then putting his finger on what he had written, he turned to his class and said: “A mathematician is one to whom that is as obvious as that twice two makes four is to you. Liouville was a mathematician.”

De eerste vrucht: de Fresnel-integralen

De modulus van de tweede integraal kunnen we afschatten:

$$\begin{aligned} \left| i \cdot \int_0^R \exp(i(R^2 - y^2) - 2Ry) \, dy \right| &\leq \int_0^R |\exp(i(R^2 - y^2) - 2Ry)| \, dy \\ &= \int_0^R \exp(-2Ry) \, dy \\ &= \frac{1}{2R} (1 - e^{-2R^2}) \end{aligned}$$

De eerste vrucht: de Fresnel-integralen

Als we de limiet van $\int_{\kappa_R} \exp(iz^2) dz$ nemen vinden we dus

$$\int_0^\infty \cos x^2 + i \sin x^2 dx - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \int_0^{R\sqrt{2}} e^{-x^2} dx = 0$$

Met als gevolg dat

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

Stervormige gebieden

Definitie

Een open deelverzameling U van $\mathbb{C}$ is *stervormig* als er een punt α in U is zodanig dat voor elk (ander) punt β van U het lijnstuk $[\alpha, \beta]$ geheel binnen U ligt. Het punt α noemen we een *centrum* voor U .

Voorbeelden

Het hele complexe vlak is stervormig; een open cirkelschijf $B(\alpha, r)$ is stervormig; het bovenhalfvlak $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ is stervormig.

In deze gevallen kan elk punt als centrum dienen.

De verzameling $\mathbb{C}^-$ is stervormig.

Welke punten kunnen als centrum dienen?

De verzameling $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ is *niet* stervormig.

Primitieven

Stelling

Laat U een open en stervormige deelverzameling van $\mathbb{C}$ zijn en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ een analytische functie. Dan heeft f op U een primitieve.

Een *primitieve* van f is (natuurlijk) een functie $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ met $F' = f$.

Als F een primitieve van f is en $\kappa : [a, b] \rightarrow U$ een kromme dan geldt

$$\int_{\kappa} f(z) \, dz = F(\kappa(b)) - F(\kappa(a))$$

In het bijzonder $\int_{\kappa} f(z) \, dz = 0$ als κ gesloten is.

De Integraalstelling van Cauchy-Goursat

Stelling

Als U een stervormige open deelverzameling van $\mathbb{C}$ is, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ een analytische functie, en $\kappa : [0, 1] \rightarrow U$ een gesloten kromme, dan geldt $\int_{\kappa} f(z) \, dz = 0$.

Dit is het eerste van de twee doelen die we ons gesteld hebben.

We wisten dit voor polynomen; nu weten we het voor alle analytische functies.

De tweede vrucht: Hoofdstelling van de Algebra

Stelling (Hoofdstelling van de Algebra)

Laat p een polynoom zijn met complexe coëfficiënten en van graad 1 of hoger. Dan is er een complex getal z zó dat $p(z) = 0$.

Het bewijs gebruikt niet meer dan de Integraalstelling voor de eenheidscirkel.

Het bewijs gaat (natuurlijk) uit het ongerijmde.

We nemen aan dat $p(z)$ een polynoom is met complexe coëfficiënten en zonder nulpunten.

We mogen aannemen dat $p(x) \in \mathbb{R}$ als $x \in \mathbb{R}$.

Schrijf $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0$, dan is

$p(z) \cdot (\overline{a_n} z^n + \overline{a_{n-1}} z^{n-1} + \cdots \overline{a_1} z + \overline{a_0})$ ook een polynoom zonder nulpunten en met reële waarden op de reële as.

Vervang, indien nodig, $p(z)$ door dat polynoom.

De tweede vrucht: Hoofdstelling van de Algebra

De functie $p(x)$ heeft geen reële nulpunten en is dus tekenvast op $\mathbb{R}$.
In het bijzonder is $p(2 \cos t)$ tekenvast op $[0, 2\pi]$.

En dus is

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{p(2 \cos t)} dt$$

ongelijk aan 0.

En de tegenspraak komt nu: de integraal is ook gelijk aan 0.

De tweede vrucht: Hoofdstelling van de Algebra

We bouwen de integraal om tot een integraal over de eenheidscirkel ε .

Als volgt: we hebben $\varepsilon(t) = \exp(it)$ met $0 \leq t \leq 2\pi$.

Dan geldt $\varepsilon'(t) = i\varepsilon(t)$ en ook $2 \cos t = \varepsilon(t) + \varepsilon(t)^{-1}$.

Dan geldt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{p(2 \cos t)} dt &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{p(\varepsilon(t) + \varepsilon(t)^{-1})} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{p(\varepsilon(t) + \varepsilon(t)^{-1})} \frac{\varepsilon'(t)}{\varepsilon'(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{i\varepsilon(t) \cdot p(\varepsilon(t) + \varepsilon(t)^{-1})} \cdot \varepsilon'(t) dt \\ &= \int_{\varepsilon} \frac{1}{iz \cdot p(z + z^{-1})} dz \end{aligned}$$

Waarom zou die integraal gelijk aan 0 zijn?

De tweede vrucht: Hoofdstelling van de Algebra

Schrijf $p(z + z^{-1})$ uit, het resultaat ziet er zo uit:

$$a_n z^{-n} + \cdots + a_n z^n = z^{-n}(a_n + \cdots + a_n z^{2n})$$

Het deel tussen de haakjes noemen we $q(z)$.

Merk op

1. $q(0) = a_n$, dus $q(0) \neq 0$
2. als $z \neq 0$ dan $p(z + z^{-1}) \neq 0$, en $z^{-n} \neq 0$, dus $q(z) \neq 0$
3. op de eenheidscirkel geldt

$$\frac{1}{z \cdot p(z + z^{-1})} = \frac{z^{n-1}}{q(z)}$$

En dus ...

De tweede vrucht: Hoofdstelling van de Algebra

... geldt

$$\int_{\varepsilon} \frac{1}{iz \cdot p(z + z^{-1})} dz = \frac{1}{i} \cdot \int_{\varepsilon} \frac{z^{n-1}}{q(z)} dz = 0$$

want $z^{n-1} \cdot q(z)^{-1}$ is analytisch op $\mathbb{C}$.