

Wat iedereen over Complexe Functies moet weten II

De krenten uit de pap

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Amsterdam, 26 september 2025

Notatie en zo

Voor we verder gaan wat afspraken over notaties.

We laten de ε van Wessel vallen en gebruiken de i als imaginaire eenheid. Dus, complexe getallen schrijven we als $a + bi$ (of $a + ib$), waarbij a en b reële getallen zijn.

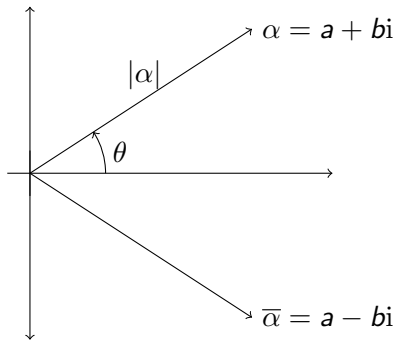
In gebieden waar i of I al wat betekent zie je vaak $a + bj$ (of $a + jb$).

Notatie en zo

Dankzij Wessels aanpak kunnen we de complexe getallen weergeven in het platte vlak, het *Complexe Vlak*.

Het getal $\alpha = a + bi$ komt overeen met het punt (a, b) .

Hieronder de meetkundige aspecten van $a + bi$.



Notatie en zo

1. de x - en y -coördinaten van het punt heten respectievelijk het *reële* en *imaginaire deel* van α , notatie: $\operatorname{Re} \alpha = a$ en $\operatorname{Im} \alpha = b$,
2. de afstand van het punt tot de oorsprong heet de *modulus* van α , notatie $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$,
3. de hoek die de plaatsvector van het punt met de *positieve* x -as maakt heet het *argument* van α , daarover hieronder meer, en
4. de gespiegelde van het punt hoort bij het complexe getal $a - bi$ dat de *complex toegevoegde* of *complex geconjugeerde* van α genoemd wordt, notatie $\overline{\alpha} = \overline{a + bi} = a - bi$.

In de complexe context worden de x - en y -as respectievelijk de *reële* en *imaginaire as* genoemd.

Het argument

Over het argument: een complex getal maak oneindig veel hoeken met de positieve reële as.

Naast de hoek θ uit de figuur is voor elk geheel getal k ook $\theta + 2k\pi$ een geldige hoek, zoals Caspar Wessel al opmerkte. Dit leidt tot allerlei notationale vondsten om die veelheid aan hoeken in toom te houden.

Mijn conventie is dat de hoek in het interval $(-\pi, \pi]$ speciale status krijgt, we noteren die als $\text{Arg } \alpha$ en noemen hem de *hoofdwaarde van het argument*.

Alle andere waarden noemen we *een argument* en die noteren we allemaal als $\arg \alpha$.

NB Er zijn boeken die $[0, 2\pi)$ als hoofdwaardeinterval nemen. Hou dat bij lezing in de gaten.

Variabelen en constanten

Ten slotte iets over variabelen en constanten.

Van Descartes hebben we de gewoonte overgenomen dat variabelen uit het eind van het alfabet komen, en constanten uit het begin.

Voor complexe variabelen gebruiken we de laatste zes letters en altijd als volgt:

$$z = x + yi \text{ en } w = u + vi.$$

Voor complexe constanten hebben velen de toevlucht tot het begin van het Griekse alfabet gezocht: complexe getallen heten meestal $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, en hun reële en imaginare delen $a, b, c, d, \dots$

Behalve dat sommige letters ook andere dienst doen:

ζ is soms een complexe variabele

κ is altijd een κ romme

Om mee te beginnen

Vraag

Wat is de mooiste formule uit de wiskunde?

Antwoord

Natuurlijk is dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Waarom?

Omdat ik het zeg!

En om de manier waarop Euler de gelijkheid afleidde.

Euler's oplossing

Euler ontbond $\sin \pi x$ in factoren:

$$\sin \pi x = \pi \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{1}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{3}\right) \cdots$$

lets mooier

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right) \cdots$$

Aan de andere kant

$$\sin \pi x = \pi x - \frac{(\pi x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(\pi x)^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots$$

ofwel

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = 1 - \frac{\pi^2}{6} x^2 + \frac{\pi^4}{120} x^4 + \cdots$$

Euler's oplossing

Vermenigvuldig het tweede product uit:

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = 1 - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) x^2 + A_4 x^4 + \dots$$

waarbij A_4 gelijk is aan de som van alle producten $\frac{1}{m^2} \cdot \frac{1}{n^2}$ met $m \neq n$.

Vergelijk dit met

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = 1 - \frac{\pi^2}{6} x^2 + \frac{\pi^4}{120} x^4 + \dots$$

Euler's oplossing

Opgave

Ga na dat

$$2A_4 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

En bepaal zo de waarde van

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Euler's oplossing

Een tabelletje aan het eind van Euler's artikel *De summis serierum reciprocarum*.

SERIERVM RECIPROCARVM. 133

§. 18. Ex his ergo deriuantur summae sequentes:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \text{ etc.} = \frac{p^2}{6} = P$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} \text{ etc.} = \frac{p^4}{95} = Q$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} \text{ etc.} = \frac{p^6}{945} = R$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} \text{ etc.} = \frac{p^8}{9450} = S$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} \text{ etc.} = \frac{p^{10}}{93555} = T$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} \text{ etc.} = \frac{691 p^{12}}{6825 \cdot 93555} = V.$$

Euler's oplossing

Wat vinden we van deze oplossing?

De oplossing deugt.

Met behulp van de Productstelling van Weierstrass en de integraalformules van Cauchy is deze manier van opereren met oneindige sommen en producten grondig te onderbouwen.

In de boeken van Boas en Remmert (literatuurlijst in de syllabus) staat deze oplossing netjes uitgewerkt.

Waarom Baseler probleem?

Het probleem de som

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

werd in 1650 door Pietro Mengoli opgeworpen en in 1735 door Euler opgelost op de zojuist geschetste wijze.

Er is door de gebroeders Bernoulli aan gewerkt maar die konden de som niet vinden, wel afschatten (zie syllabus). Zij en Euler kwamen uit Basel, vandaar (waarschijnlijk) de naam.

Veel oplossingen

Dit probleem trekt oplossingen aan: zo ongeveer alles wat in de Analyse ontdekt wordt wordt na een tijdje ook op het Baseler probleem losgelaten.

Fourier-analyse: de identiteit van Parseval levert een bewijs.

De Residuenstelling: toegepast op de co-tangens.

En nog veel meer.

De oplossing van vandaag is terug te voeren op Cauchy's *Course d'Analyse*.

Een belangrijk ingrediënt

Dankzij Wessel's definitie van de vermenigvuldiging krijgen we de formule van De Moivre cadeau:

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

In NOTE VIII, getiteld *Sur les Formules qui servent à convertir les Sinus ou Cosinus des Multiples d'un arc en polynomes dont les différens termes ont pour facteurs les puissances ascendantes du Sinus ou Cosinus de ce même arc*, van zijn *Course d'Analyse* doet Cauchy wat de titel belooft, namelijk $\cos n\theta$ en $\sin n\theta$ in machten van $\cos \theta$ en $\sin \theta$ uitdrukken.

Een belangrijk ingrediënt

Helemaal aan het einde van NOTE VIII gebruikt Cauchy de gevonden polynomen om een oplossing van het Baseler probleem te geven.

Die oplossing is wat ingewikkeld omdat hij heen en weer verwijst naar eerdere hoofdstukken voor allerlei tussenresultaten.

De oplossing die we gaan bespreken is door velen (her)ontdekt en onder meer te vinden in **een artikel** (en een boek) van de tweelingbroers A. M. Yaglom en I. M. Yaglom.

Stap 1

We werken de rechterkant in de formule van De Moivre uit:

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k} \theta \cdot i^k \sin^k \theta$$

Splits in reële en imaginaire delen:

$$\cos n\theta = \cos^n \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \cdot \sin^2 \theta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \theta \cdot \sin^4 \theta + \dots$$

en

$$\sin n\theta = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \theta \cdot \sin \theta - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \theta \cdot \sin^3 \theta + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \theta \cdot \sin^5 \theta + \dots$$

(In één klap oneindig veel gonioformules ...)

Stap 2

Neem de formule voor $\sin n\theta$ en deel links en rechts door $\sin^n \theta$:

$$\frac{\sin n\theta}{\sin^n \theta} = \binom{n}{1} \frac{\cos^{n-1} \theta}{\sin^{n-1} \theta} - \binom{n}{3} \frac{\cos^{n-3} \theta}{\sin^{n-3} \theta} + \binom{n}{5} \frac{\cos^{n-5} \theta}{\sin^{n-5} \theta} + \dots$$

We nemen n nu oneven, zeg $n = 2m + 1$, en vervangen $\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ door $\cotan \theta$:

$$\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin^{2m+1} \theta} = \binom{n}{1} \cotan^{2m} \theta - \binom{n}{3} \cotan^{2m-2} \theta + \binom{n}{5} \cotan^{2m-4} \theta + \dots$$

Goed kijken: rechts staat een polynoom, met $\cotan^2 \theta$ ingevuld, namelijk

$$p(x) = \binom{2m+1}{1} x^m - \binom{2m+1}{3} x^{m-1} + \binom{2m+1}{5} x^{m-2} + \dots$$

Stap 3

Wat kunnen we over het polynoom

$$p(x) = \binom{2m+1}{1} x^m - \binom{2m+1}{3} x^{m-1} + \binom{2m+1}{5} x^{m-2} + \dots$$

zeggen?

Twee dingen:

- ▶ we kennen de nulpunten, en
- ▶ we kennen hun som.

Stap 3: de nulpunten

We bekijken het linkerlid en stellen dat gelijk aan 0:

$$\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin^{2m+1}\theta} = 0$$

De oplossingen van deze vergelijking zijn de getallen $\theta_k = \frac{k\pi}{2m+1}$, met $k \in \mathbb{Z}$, *uitgezonderd* de veelvouden van $2m+1$ (die maken de noemer gelijk aan 0).

Zo vinden we ineens een heleboel nulpunten van $p(x)$: de getallen $x_k = \cotan^2 \theta_k$.

Dat lijken er oneindig veel, maar $\cotan$ is periodiek is met periode π dus we houden alleen $k = 1$ tot en met $2m$ over.

Daarnaast geldt $\cotan(\pi - \theta) = -\cotan \theta$, en dus volgt $\cotan^2 \frac{k}{n}\pi = \cotan^2 \frac{n-k}{n}\pi$ voor $k = 1$ tot en met m .

Omdat de graad van p gelijk is aan m hebben we hiermee alle nulpunten gevonden: de getallen x_k voor $k = 1, \dots, m$.

Stap 3: de som van de nulpunten

Net als Euler gebruiken we de nulpunten om $p(x)$ te ontbinden in factoren:

$$p(x) = \binom{2m+1}{1} \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots (x - x_m)$$

En net als Euler vermenigvuldigen we dat weer uit:

$$p(x) = \binom{2m+1}{1} (x^m - (x_1 + x_2 + \cdots + x_m)x^{m-1} + \cdots + (-1)^m x_1 \cdot x_2 \cdots x_m)$$

Zet daar de oorspronkelijke gedaante van $p(x)$ nog even bij:

$$p(x) = \binom{2m+1}{1} x^m - \binom{2m+1}{3} x^{m-1} + \binom{2m+1}{5} x^{m-2} + \cdots$$

we vinden dus ...

Stap 3: de som van de nulpunten

... dat

$$\binom{2m+1}{1} \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_m) = \binom{2m+1}{3}$$

ofwel

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{2m \cdot (2m-1)}{6}$$

en om nog wat meer indruk te maken:

$$\cotan^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \cotan^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right) + \cdots + \cotan^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m \cdot (2m-1)}{6}$$

(Daar kun je mee thuiskomen, met deze complexe oplossing van een reëel probleem.)

Stap 4: nog een som

Hier is nog een gonioformule:

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \cotan^2 \theta + 1$$

En hiermee bepalen we nog een andere som:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{n} \right)} + \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{2\pi}{n} \right)} + \cdots + \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{m\pi}{n} \right)} &= \frac{(n-1)(n-2)}{6} + m \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n-1}{2} \\ &= \frac{(n-1)(n+1)}{6} \end{aligned}$$

Om de som wat in te krimpen is $2m+1$ overal vervangen door n .

Stap 5: een paar afschattingen

Het laatste ingrediënt is een ongelijkheid: als $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ dan geldt

$$0 < \sin \theta < \theta < \tan \theta$$

(Een anschouwelijk bewijs in de syllabus.)

En dus ook

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} > \frac{1}{\theta^2} > \cotan^2 \theta$$

Stap 5: een paar afschattingen

We hebben drie sommen

$$\left(\frac{1}{\sin^2 x_k}\right) \quad \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)} + \cdots + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right)} = \frac{(n-1)(n+1)}{6}$$

en

$$\left(\frac{1}{x_k^2}\right) \quad \left(\frac{n}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{n}{2\pi}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{m\pi}\right)^2 = ???$$

en

$$\left(\cotan^2 x_k\right) \quad \cotan^2\left(\frac{\pi}{n}\right) + \cotan^2\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \cotan^2\left(\frac{m\pi}{n}\right) = \frac{(n-1)(n-2)}{6}$$

Geordend van groter naar kleiner.

Stap 5: de laatste klap

Conclusie:

$$\frac{(n-1)(n+1)}{6} > \left(\frac{n}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{n}{2\pi}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{m\pi}\right)^2 > \frac{(n-1)(n-2)}{6}$$

Vermenigvuldig alles met π^2/n^2 :

$$\frac{\pi^2}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) > \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} > \frac{\pi^2}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

Pas de insluitstelling toe.

Het reële deel

Om later over na te denken.

Welke som kun je evalueren door van

$$\cos n\theta = \cos^n \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \cdot \sin^2 \theta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \theta \cdot \sin^4 \theta + \dots$$

te vertrekken?

Foutschattingen

We hebben (impliciet) schattingen (onder en boven) gevonden voor het verschil

$$\frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} \right)$$

Wat zegt dit over het aantal termen dat nodig is om het antwoord tot op drie, vier, vijf, ..., of zoals Euler gaf, negentien cijfers achter de komma te benaderen?

Met behulp van integralen is het verschil in te klemmen tussen $(m+1)^{-1}$ en m^{-1} .
(Denk aan het bewijs van het integraalkenmerk.)

Geeft dat verbeteringen van het aantal benodigde termen?

Foutschattingen: uit Euler's artikel

Hoe zou Euler aan onderstaande benadering gekomen zijn?

§. 2. Deductus sum autem nuper omnino inopinato ad elegantem summae huius seriei $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}$ expressionem, quae a circuli quadratura pendet, ita, vt si huius seriei vera summa haberetur, inde simul circuli quadratura sequeretur. Inueni enim summae huius seriei sextuplum aequale esse quadrato peripheriae circuli, cuius diameter est 1; seu posita istius seriei summa $=s$, tenebit $\sqrt{6s}$ ad 1 rationem peripheriae ad diametrum. Huius autem seriei summam nuper ostendi proxime esse 1, 6449340668482264364, ex cuius numeri sextuplo, si extrahatur radix quadrata, reipsa prodit numerus 3, 141592653589793238 exprimens circuli peripheriam, cuius diameter est 1. Iisdem porro vestigiis, quibus haec summa summa

Chebyshevpolynomen

We kijken nog even naar deze gonioformule

$$\cos n\theta = \cos^n \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \cdot \sin^2 \theta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \theta \cdot \sin^4 \theta + \dots$$

Door overal $\sin^2 \theta$ te vervangen door $1 - \cos^2 \theta$ en alle vermenigvuldigingen uit te werken ontstaat een uitdrukking van de vorm

$$a_n \cos^n \theta + a_{n-2} \cos^{n-2} \theta + a_{n-4} \cos^{n-4} \theta + \dots$$

Het corresponderende polynoom $a_n x^n + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-4} x^{n-4} + \dots$ heet het n -de Chebyshevpolynoom, notatie $T_n(x)$.

Kortweg geldt dus $\cos n\theta = T_n(\cos \theta)$.

Deze komen bij de lezing van Daan Huybrechts aan de orde.

Chebyshevpolynomen

Opgave

Ga na dat $a_n = 2^{n-1}$. *Hint:* $a_n = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots$.

Opgave

Ga na dat $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2 \cos \theta \cdot \cos n\theta$.

Concludeer dat de polynomen T_n onderling verbonden zijn door de betrekking $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2x \cdot T_n(x)$.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ВЫВОД ФОРМУЛ ВАЛЛИСА, ЛЕЙБНИЦА И ЭЙЛЕРА ДЛЯ ЧИСЛА π

А. М. Яглом и И. М. Яглом

В высшей математике выводится большое число формул, выражающих число π в виде бесконечной суммы или бесконечного произведения. Наиболее известны из них формула Валлиса

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots = \frac{\pi}{2}, \quad (1)$$

формула Лейбница

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

и формула Эйлера

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}. \quad (3)$$

Uit het artikel van de gebroeders Yaglom

А. Формула Эйлера. Наиболее просто и неожиданно коротко элементарное доказательство формулы (3). Из формулы Муавра

$$\begin{aligned}\cos n\alpha + i \sin n\alpha &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \\ &= \cos^n \alpha + i C_n^1 \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - C_n^2 \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha - i C_n^3 \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + \dots\end{aligned}\quad (4)$$

следует:

$$\sin n\alpha = C_n^1 \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - C_n^3 \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + C_n^5 \cos^{n-5} \alpha \sin^5 \alpha - \dots\quad (5)$$

или

$$\sin n\alpha = \sin^n \alpha (C_n^1 \operatorname{ctg}^{n-1} \alpha - C_n^3 \operatorname{ctg}^{n-3} \alpha + C_n^5 \operatorname{ctg}^{n-5} \alpha - \dots).\quad (6)$$

Uit het artikel van de gebroeders Yaglom

Пусть теперь $n = 2m + 1$ нечётно. Если α равно $\frac{k\pi}{n} = \frac{k\pi}{2m+1}$, $k = 1, 2, \dots, m$, то $\sin n\alpha = 0$, а $\sin \alpha \neq 0$; следовательно,

$$C_{2m+1}^1 \operatorname{ctg}^{2m} \alpha - C_{2m+1}^3 \operatorname{ctg}^{2m-2} \alpha + C_{2m+1}^5 \operatorname{ctg}^{2m-4} \alpha - \dots = 0.$$

Таким образом, мы видим, что уравнение

$$C_{2m+1}^1 x^m - C_{2m+1}^3 x^{m-1} + C_{2m+1}^5 x^{m-2} - \dots = 0 \quad (7)$$

имеет корни

$$x_k = \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (8)$$

Воспользовавшись выражением суммы корней уравнения через его коэффициенты, найдём:

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{n} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{n} + \dots + \operatorname{ctg}^2 \frac{m\pi}{n} = \frac{C_n^3}{C_n^1} = \frac{(n-1)(n-2)}{6}. \quad (9)$$

Но $\operatorname{cosec}^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1$; значит

$$\operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{n} + \operatorname{cosec}^2 \frac{2\pi}{n} + \dots + \operatorname{cosec}^2 \frac{m\pi}{n} = \frac{(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n+1)}{6}. \quad (10)$$

Uit het artikel van de gebroeders Yaglom

Так как для углов первой четверти $\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$ и, следовательно, $\operatorname{cosec} \alpha > \frac{1}{\alpha} > \operatorname{ctg} \alpha$, то из (9) и (10) вытекает, что

$$\frac{1}{6}(n-1)(n-2) < \left(\frac{n}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{n}{2\pi}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{m\pi}\right)^2 < \frac{1}{6}(n-1)(n+1),$$

т. е.

$$\frac{\pi^2}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad (11)$$

где $n = 2m + 1$. Но при $m \rightarrow \infty$ правая и левая части последнего двойного неравенства стремятся к одному и тому же пределу $\frac{\pi^2}{6}$. Отсюда сразу получается формула Эйлера (3).