

Wat iedereen over Complexe Functies moet weten II

De krenten uit de pap

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Amsterdam, 26 september 2025

Limieten

De definitie van

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = \beta$$

is als vanouds:

voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat een $\delta > 0$ zó dat voor elke z met $|z - \alpha| < \delta$ geldt dat $|f(z) - \beta| < \varepsilon$.

Continuïteit

Ook de definitie van f is continu in α is de oude:

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = f(\alpha)$$

De *bewijzen* van de rekenregels voor limieten en continuïteit blijven onveranderd.

Wat we *niet* meer hebben: linker- en rechterlimieten, en links- en rechtscontinuïteit.

Immers, z kan nu α van alle kanten naderen, niet alleen langs rechte lijnen maar ook langs allerlei andere krommen die door α gaan.

Dit maakt het moeilijker voor een limiet om te bestaan, maar als hij bestaat is dat dan ook meteen een sterke eigenschap waar veel meer uit te halen is.

Open verzamelingen

Belangrijk voor de Complexe-Functietheorie zijn de domeinen van de functies waar we het over hebben: dat moeten *open* verzamelingen zijn.

Open schijf

Als $\alpha \in \mathbb{C}$ en $r > 0$ dan is

$$\{z : |z - \alpha| < r\}$$

de *open schijf* om α met straal r . Notatie: $B(\alpha, r)$.

Open verzameling

Een deelverzameling U van $\mathbb{C}$ is *open* als voor elke $\alpha \in U$ een $r > 0$ bestaat zó dat $B(\alpha, r) \subseteq U$.

Typisch voor wiskundigen: “open schijf” en “open verzameling” apart definiëren ...

Open verzamelingen

Vraag: Is een open schijf ook een open verzameling?

Leuk dat je het vraagt. Denk er even over na.

We zijn het eens: ja dus.

Een paar voorbeelden.

- ▶ $\mathbb{C}$ zelf
- ▶ de eenheidsschijf $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ en elke andere open schijf dus ook
- ▶ het bovenhalfvlak $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ en ook de andere drie halfvlakken natuurlijk
- ▶ $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, afgekort tot $\mathbb{C}^*$
- ▶ $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$, afgekort tot $\mathbb{C}^-$ (dat is $\mathbb{C}$ minus de negatieve reële as en 0)

Opgave voor bij het slapen gaan

Ga na dat deze verzamelingen daadwerkelijk open zijn.

De definitie

We beperken ons nu tot functies die op open verzamelingen gedefinieerd zijn.

Definitie

Zij U een open deelverzameling van C en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ een functie, en laat $\alpha \in U$. We zeggen dat f *differentieerbaar* is in α als

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha}$$

bestaat, en die limiet noteren we dan natuurlijk als $f'(\alpha)$.

Opgaven

Opgave

Voor elke $n \in \mathbb{N}$ is de functie $z \mapsto z^n$ differentieerbaar in elk punt van $\mathbb{C}$, met $z \mapsto nz^{n-1}$ als afgeleide functie.

Opgave

Ga na dat de welbekende rekenregels, som/verschil, product, quotiënt, ketting, ... ook hier gelden en met exact dezelfde bewijzen als in het reële geval.

Conclusie: elk polynoom is differentieerbaar op heel $\mathbb{C}$, en als $n < 0$ dan is $z \mapsto z^n$ differentieerbaar op heel $\mathbb{C}^*$, met afgeleide $z \mapsto nz^{n-1}$.

Een nergens differentieerbare functie

De complex toegevoegde $z \mapsto \bar{z}$ is **nergens differentieerbaar**.

Neem $\alpha \in \mathbb{C}$, met $\alpha = a + bi$ en stel de limiet op

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{(x - yi) - (a - bi)}{(x + yi) - (a + bi)}$$

Reken hem horizontaal uit:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - bi) - (a - bi)}{(x + bi) - (a + bi)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x - a} = 1$$

En reken hem verticaal uit:

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{(a - yi) - (a - bi)}{(a + yi) - (a + bi)} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{-y + b}{y - b} = -1$$

De limiet bestaat dus niet.

Verband met reële differentieerbaarheid

Als $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ een functie is heeft deze een reëel en imaginair deel die we ook als functie van x en y kunnen beschouwen (dankzij Caspar Wessel).

(Bijvoorbeeld toen we lieten zien dat $z \mapsto \bar{z}$ nergens differentieerbaar is.)

Ander voorbeeld

$$z^3 = (x + yi)^3 = x^3 + 3x^2yi + 3x(yi)^2 + (yi)^3 = (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i$$

We schrijven $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ en $v(x, y) = 3x^2y - y^3$.

En algemeen: $f(z) = f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y) \cdot i$.

Verband met reële differentieerbaarheid

We rekenen de horizontale limiet uit (die is gelijk aan $f'(\alpha)$):

$$\begin{aligned}f'(\alpha) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^3 - 3xb^2) + (3x^2b - b^3)i - ((a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i)}{x - a} \\&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3 - 3b^2(x - a) + 3b(x^2 - a^2)i}{x - a} \\&= (3a^2 - 3b^2) + 6abi\end{aligned}$$

Algemeen komt er

$$\begin{aligned}f'(\alpha) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(u(x, b) - u(a, b)) + (v(x, b) - v(a, b))i}{x - a} \\&= \frac{\partial}{\partial x} u(a, b) + \frac{\partial}{\partial x} v(a, b)i\end{aligned}$$

Verband met reële differentieerbaarheid

We rekenen de verticale limiet uit (die is gelijk aan $f'(\alpha)$):

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \lim_{y \rightarrow b} \frac{(a^3 - 3ay^2) + (3a^2y - y^3)i - ((a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i)}{(y - b)i} \\ &= \lim_{y \rightarrow b} \frac{-3a(y^2 - a^2) + (3a^2(y - b) - (y^3 - b^3))i}{(y - b)i} \\ &= \frac{-6ab + (3a^2 - 3b^2)i}{i} \end{aligned}$$

Verband met reële differentieerbaarheid

Algemeen komt er

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \lim_{y \rightarrow b} \frac{(u(a, y) - u(a, b)) + (v(a, y) - v(a, b))i}{(y - b)i} \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial y} u(a, b) + \frac{\partial}{\partial y} v(a, b)i}{i} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} v(a, b) - \frac{\partial}{\partial y} u(a, b)i \end{aligned}$$

Uitleg: $\frac{\partial}{\partial x}$ en $\frac{\partial}{\partial y}$ staan voor de *partiële afgeleiden*: bij $\frac{\partial}{\partial x}$ stelden we y constant (gelijk aan b), differentieerden het resultaat naar x en vulden a in voor x . Idem voor $\frac{\partial}{\partial y}$, met verwisseling van x en y , en a en b .

We schrijven de partiële afgeleiden wat korter op: u_x , u_y , v_x , en v_y .

Verband met reële differentieerbaarheid

Even herhalen:

$$\begin{aligned}f'(\alpha) &= u_x(a, b) + v_x(a, b)i \\ &= v_y(a, b) - u_y(a, b)i\end{aligned}$$

Conclusie:

$$u_x = v_y \quad \text{en} \quad v_x = -u_y$$

Dit zijn de *Cauchy-Riemannvergelijkingen*.

Deze vormen de eerste pijler onder de Complexe-Functietheorie.

De reële en imaginaire delen van een differentieerbare functie zijn dus nauw verbonden. Ze zijn uit elkaar te maken (op een constante na) door differentiëren en primitiveren, **en** langs twee wegen!

$$u \rightarrow u_x \rightarrow v = \int u_x \, dy \quad \text{en} \quad u \rightarrow u_y \rightarrow v = \int -u_y \, dx$$

Reken maar na voor z^3 .

Verband met reële differentieerbaarheid

Stelling

*Een functie $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ is differentieerbaar in α dan en slechts dan als hij in α differentieerbaar is als functie naar $\mathbb{R}^2$ **en** als de partiële afgeleiden van u en v aan de Cauchy-Riemannvergelijkingen voldoen.*

Voor $f(z) = \bar{z}$ geldt $u_x = 1 \neq -1 = v_y$, en dus ...

Opgave

Is er een differentieerbare functie met reëel deel

1. $x^2 - y^2$
2. $x^2 + y^2$
3. xy
4. $x^3 - 2xy^2$
5. $5x + 6y$

Analytische functies

Definitie

Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{C}$, en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ een functie. We noemen f *analytisch* in $\alpha \in U$ als er een $r > 0$ is met $B(\alpha, r) \subseteq U$ en zó dat f differentieerbaar is in elk punt van $B(\alpha, r)$.

We zeggen dat f analytisch is op U als f analytisch is in elk punt van U .

Een functie is dus nooit analytisch in één enkel punt.

Alle polynomen zijn analytisch op heel $\mathbb{C}$.

Rationale functies (quotiënten van polynomen) zijn analytisch op $\mathbb{C}$ behalve in de nulpunten van de noemers.

Is er nog meer?

De exponentiële functie

Als toepassing van de Cauchy-Riemannvergelijkingen laten we zien dat de exponentiële functie analytisch is op $\mathbb{C}$.

De definitie van $\exp(z)$ die vaak gehanteerd wordt is

$$\exp(z) = \exp(x + yi) = \exp(x) \cdot \exp(yi) = \exp(x) \cdot (\cos(y) + i \sin(y))$$

Dit gedraagt zich dankzij Caspar Wessel exponentiëel:

$$\begin{aligned}\exp(z) \cdot \exp(w) &= \exp(x) \cdot \exp(u) \cdot (\cos(y) + i \sin(y)) \cdot (\cos(v) + i \sin(v)) \\ &= \exp(x + u) \cdot (\cos(y + v) + i \sin(y + v)) \\ &= \exp(z + w)\end{aligned}$$

De exponentiële functie

We hebben

$$\exp(x + yi) = \exp(x) \cdot \cos(y) + i \exp(x) \cdot \sin(y)$$

met $u(x, y) = \exp(x) \cdot \cos(y)$

en $v(x, y) = \exp(x) \cdot \sin(y)$,

en dus $u_x = u = v_y$ en $u_y = -v = -v_x$,

zien we dat de exponentiële functie reëel differentieerbaar is en aan de Cauchy-Riemannvergelijkingen voldoet.

En verder geldt

$$\exp'(z) = u_x(x, y) + v_x(x, y)i = u(x, y) + v(x, y)i = \exp(z)$$

dus de functie is zijn eigen afgeleide.

$\exp(z)$ is analytisch op $\mathbb{C}$.