

Wat iedereen over Complexe Functies moet weten I

De krenten uit de pap

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Antwerpen, 19 september 2025

Rafael Bombelli

Schreef een heel dik boek: *L'Algebra* (drie delen, in het Italiaans).

Hierin legde hij heel precies uit hoe algebra te bedrijven.

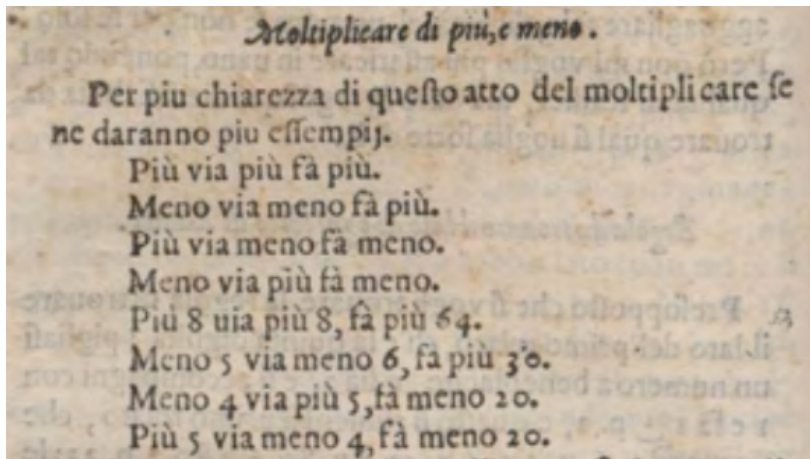
Hij was ontevreden over de bestaande boeken en wilde het zo opschrijven dat iedereen het kon begrijpen.

Gaf ook namen aan diverse machten en gaf van elk precieze definities: numero quadrato, numero cubo, numero quadroquadrato, ...

En heel veel voorbeelden.

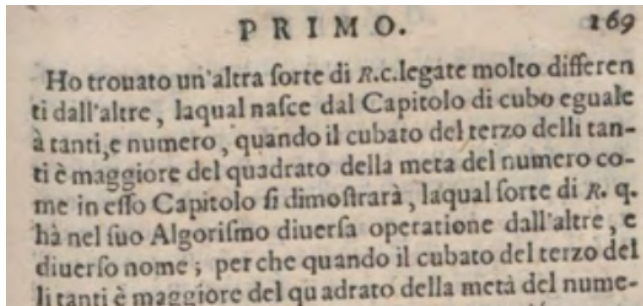
Rafael Bombelli: L'Algebra

En hier en daar een 'gedichtje' om de regels te helpen onthouden.



Rafael Bombelli: L'Algebra

Op bladzijde 169 komen de complexe getallen tevoorschijn.



Wat staat daar?

Rafael Bombelli: L'Algebra

In de voorgaande pagina's heeft Bombelli allerlei dingen met derdemachtswortels van binomia gedaan.

Een 'binomium' is een som van twee termen die verder niet vereenvoudigd kan worden, zoals $6 + \sqrt{5}$ of $\sqrt{24} + \sqrt{5}$.

Waarom derdemachtswortels van binomia?

Omdat die optreden bij Cardano's algoritme voor het oplossen van derdegraadsvergelijkingen.

In het plaatje blijkt Bombelli vooruit naar het Hoofdstuk over "cubo equale à tanti, e numero".

In onze taal: de vergelijking $x^3 = px + q$.

Rafael Bombelli: L'Algebra

Hij legt uit dat er bij het oplossen van $x^3 = px + q$ gevallen zijn, namelijk als $(\frac{1}{3}p)^3 > (\frac{1}{2}q)^2$, waar het nemen van derdemachtswortels anders gaat.

Tijdens het uitvoeren van het algoritme komt onderweg $\sqrt{(\frac{1}{2}q)^2 - (\frac{1}{3}p)^3}$ voor als deel van twee binomia:

$$\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 - \left(\frac{1}{3}p\right)^3} \text{ en } \frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 - \left(\frac{1}{3}p\right)^3}$$

Hiervan moeten de derdemachtswortels getrokken worden ...

En dat is inderdaad problematisch als $(\frac{1}{3}p)^3 > (\frac{1}{2}q)^2$

“il cubato del terzo delli tanti è maggiore del quadrato delle meta del numero”

Rafael Bombelli: L'Algebra

Bombelli: maar hier gaan we toch mee doorrekenen.

Notatie:

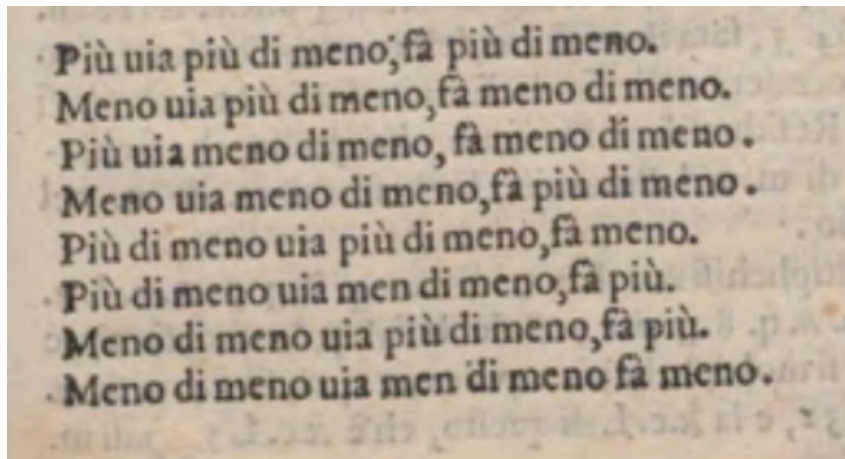
- ▶ “p. di m. 3” voor $3\sqrt{-1}$ (più di meno), en
- ▶ “m. di m. 3” voor $-3\sqrt{-1}$ (meno di meno)

Dan volgen 30 bladzijden waarop het rekenen met deze nieuwe ‘getallen’ uitvoerig wordt uitgelegd.

En, weer, heel precies.

Rafael Bombelli: L'Algebra

Met een gedichtje:



Rafael Bombelli: L'Algebra

Een voorbeeld:

○ Multiplichifi $R.c.$ $L. 4.p.$ di $m.R.q. 2.$ I per $R.c. L. 3.$
 $p.$ di $m.R.q. 8.$ I Multiplicaremo prima $p.$ di $m.R.q. 2.$
uia $p.$ di $m.R.q. 8.$ fa $m. 4.$ poi multiplicaremo 3 uia
 4 fa 12 , che gionto con $m. 4.$ fa $p. 8.$ Dipoi multiplica-
remo 3 uia $p.$ di $m.R.q. 2.$ farà $p.$ di $m.R.q. 18.$ e dipoi 4 ,
uia $p.$ di $m.R.q. 8.$ fa $p.$ di $m.R.q. 128$, che gionto con
 $p.$ di $m.R.q. 18.$ fa $p.$ di $m.R.q. 242$, che gionto con $p.$
 $8.$ e toltone la $R.c.$ haueremo $R.c. L. 8.p.$ di $m.R.q. 128.$ I
per prodotto della multiplicatione.

Rafael Bombelli: L'Algebra

Vertaling: “R. c. [4. p. di m. R. q. 2.] per R. c. [3. p. di m. R. q. 8.]”
betekent

$$\sqrt[3]{4 + i\sqrt{2}} \times \sqrt[3]{3 + i\sqrt{8}}$$

Als volgt: p. di m. $\sqrt{2}$ maal p. di m. $\sqrt{8}$ geeft -4 , en 3 maal 4 geeft 12 en samen met -4 geeft dat 8.

Verder: 3 maal p. di m. R. q. 2 geeft $i\sqrt{18}$, en 4 maal p. di m. R. q. 8 geeft $i\sqrt{128}$ en samen met $i\sqrt{18}$ geeft dat $i\sqrt{242}$.

Het antwoord is dus R. c. [8. p. di m. R. q. 128]

(schrijffout van Bombelli of een drukfout: $\sqrt[3]{8 + i\sqrt{242}}$ natuurlijk)

Rafael Bombelli: derdegraadsvergelijking

In boek 2 van *L'Algebra* wordt duidelijk waarom dit allemaal nodig is.

Hij geeft een uitgebreide behandeling van de oplosmethoden die Cardano in zijn *Ars Magna* heeft gepubliceerd.

Met, onder andere, veel betere plaatjes.

Rafael Bombelli ($x^3 = 15x + 4$)

Op pagina 293 staat een voorbeeld waar de methode van Cardano stuk lijkt te lopen.
In moderne termen: los op $x^3 = 15x + 4$.

Het algoritme uit hoofdstuk XII van Cardano's *Ars Magna* volgend nemen we het kwadraat van de helft van 4 en trekken daar de derde macht van één-derde van 15 van af; van het resultaat, $2^2 - 5^3 = -121$, nemen we de vierkantswortel en tellen die op bij, en trekken die af van 2. De uiteindelijke oplossing is dan

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

(in de syllabus staat hoe dit in de moderne schrijfwijze verloopt). Hier lijkt de trein te stoppen.

Maar met een scheef oog zie je zo de oplossing $x = 4$ (want $64 = 60 + 4$).

Bombelli kon met zijn nieuwe getallen de trein verder laten rijden.

Rafael Bombelli ($x^3 = 15x + 4$)

Ancora si può procedere nella agguagliatione di tal Capitolo in questa guisa. Agguagliasi 15 à 15 p. 4 , piglisi il terzo delli Tanti, che è 5 , cubisi fa 125 , e questo si caui del quadrato della metà del numero, ch'è 4 , resta m. 121 (ilqual si chiamerà più di meno) che di questo pigliata la R. q. sarà p. di m. 11 , che aggiunta con la metà del numero, fa 1 p. di m. 11 , che pigliatone il lato cubico, ed'aggiunto col suo residuo, fa 2 p. di m. 1 . & 2 m. di m. 1 , che giunti insieme fanno 4 , e 4 , è la ualuta del Tanto. Et benchè à molti parerà questa cosa strana, perche di questa opinione fui ancho già vn tempo parendomi più tosto fosse sofistica, che uerrà, nondimeno

15 Egualè 15 . p. 4 .
 5 . 2 .
 5 . 2 .
 25 . 4 .
 5 . 125 .
 125 . R. q. p. di m. 121 .
Somma R. q. p. di m. 121 . Resta R. q. p. di m. 121 .
R. c. L. 1 p. di m. 11 . R. c. L. 2 m. di m. 11 .
Lato 1 p. di m. 1 . 2 m. di m. 1 .
Sommati fanno 4 . che è la ualuta del Tanto.

Bombelli's oplossing van $x^3 = 15x + 4$.

Rafael Bombelli ($x^3 = 15x + 4$)

Wat daar gebeurt is dat hij de derdemachtswortels van $2p$ p. di m. 11 en $2p$ m. di m. 11, dat wil zeggen van $2 + \sqrt{-121} = 2 + 11\sqrt{-1}$ en $2 - \sqrt{-121} = 2 - 11\sqrt{-1}$, bepaalt.

Die had hij ook al eerder in het boek bepaald, maar hij doet het nog een keer. Probeer $a + b\sqrt{-1}$ en $a - b\sqrt{-1}$.

Hun product is $a^2 + b^2$ en ook gelijk aan $\sqrt[3]{125} = 5$.

De derde macht is $(a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)\sqrt{-1}$, dus we vinden ook $a^3 - 3ab^2 = 2$ en $3a^2b - b^3 = 11$.

Bombelli probeerde zo te zien alleen gehele a en b , en dan volgt snel $a = 2$ en $b = 1$.

Conclusie: $\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1}$ en $\sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1}$.

De som van die twee is de oplossing die we al zagen: 4.

En zo zijn de complexe getallen geboren.

Caspar Wessel (1745–1818)

(Er is geen portret van het bekend of bewaard gebleven. Een volledige biografie is te vinden in *Caspar Wessel: On the Analytical Representation of Direction*)

Geboren in Vestby (nu Noorwegen, toen Denemarken)

Studeerde in Kopenhagen, onder de wiskundige Horrebow.

Met zijn broer Ole Christopher verdiende hij bij met landmeten.

En dat is hij zijn verdere leven blijven doen.

In 1798 werd hij Koninklijk Inspecteur voor Landmeting.

In 1799 verscheen zijn werk *Om Directionens analytiske Betegning, et Forsog, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske Polygoners Oplosning*.

En daar gaan we het nu over hebben.

Caspar Wessel (1745–1818)

Wat gebeurt er in dat werk?

Niets meer of minder dan een meetkundige invoering van de complexe getallen.

En nog veel meer: de “plane og sphæriske Polygoners Oplosning” is eigenlijk het hoofddeel van het werk. Het laat zien hoe men vlakke en sferische veelhoeken kan ‘oplossen’, dat wil zeggen: completeren als nog niet alle zijden en hoeken bekend zijn.

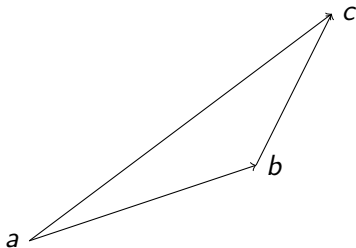
Optellen van gerichte lijnstukken

Wessel definieerde het optellen van gerichte lijnstukken (zeg maar vectoren) met behulp van de kop-staartmethode.

Zo is de som van 3 voet vooruit en 2 voet achteruit niet de samenvoeging van de eerste 3 en tweede 2 voeten, maar de som is één voet vooruit.

Optellen van gerichte lijnstukken

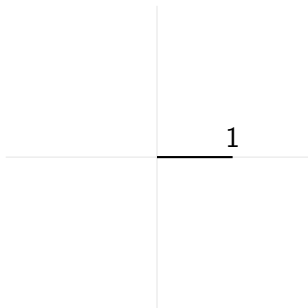
Evenzo in een driehoek: als daar de eerste zijde van a naar b gaat en de tweede van b naar c , dan is de som de derde zijde: die van a naar c . Dit kunnen we noteren als $ab + bc$, zodat ac en $ab + bc$ hetzelfde betekenen, ofwel $ac = ab + bc = -ba + bc$, want ba is de tegengestelde van ab .



Vermenigvuldigen van gerichte lijnstukken

Vermenigvuldigen kost wat meer moeite.

We leggen een vast lijnstuk neer dat we de eenheid noemen en als 1, of ook $+1$, noteren.



Vermenigvuldigen van gerichte lijnstukken

Dan: het product van twee vectoren moet uit de eerste factor gevormd worden op precies dezelfde wijze als de tweede factor uit de eenheid gevormd wordt.

Dat wil zeggen

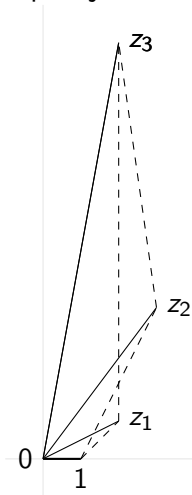
Eerst de vectoren moeten zó zijn dat ze in het vlak waar de eenheid ligt geplaatst kunnen worden.

Daarnaast wat betreft de lengte van het product: deze moet zich tot de lengte van de eerste factor verhouden als de lengte van de tweede factor tot de eenheid.

Ten slotte als de eenheid, de eerste factor, en de tweede factor een gemeenschappelijk beginpunt worden gegeven dan moet het product in het vlak van de eenheid liggen en evenveel graden van de eerste factor afwijken, en aan dezelfde kant, als de tweede factor afwijkt van de eenheid, zodat de richtingshoek van het product (of zijn afwijking van de eenheid) gelijk is aan de som van de richtingshoeken van de factoren.

Vermenigvuldigen van gerichte lijnstukken

Tijd voor een plaatje.



De eenheid

De lijnstukken $[0, z_1]$ en $[0, z_2]$

De driehoek $[0, 1, z_2]$

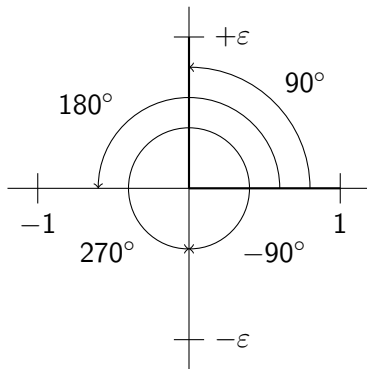
De driehoek $[0, z_1, z_3]$ gelijkvormig met $[0, 1, z_2]$, en aan dezelfde kant van z_1 als z_2 ten opzichte van 1

Dus $z_3 = z_1 \cdot z_2$

en ook: $z_3 = z_2 \cdot z_1$

De wortel uit -1

Naast de “positieve rechtlijnige eenheid $+1$ ” introduceerde Wessel “een zekere andere eenheid, loodrecht op de positieve eenheid, en met hetzelfde beginpunt”, genoteerd $+\varepsilon$. De richtingshoek van $+1$ is dan 0° , die van -1 is 180° , die van $+\varepsilon$ is 90° , en die van $-\varepsilon$ is -90° of 270° .



De wortel uit -1

En volgens de regel dat de richtingshoek van een product de som van die der factoren is volgt $(+1) \cdot (+1) = +1$, $(+1) \cdot (-1) = -1$, $(-1) \cdot (-1) = +1$, $(+1) \cdot (+\varepsilon) = +\varepsilon$, $(+1) \cdot (-\varepsilon) = -\varepsilon$, $(-1) \cdot (+\varepsilon) = -\varepsilon$, $(-1) \cdot (-\varepsilon) = +\varepsilon$, $(+\varepsilon) \cdot (+\varepsilon) = -1$, $(+\varepsilon) \cdot (-\varepsilon) = +1$, $(-\varepsilon) \cdot (-\varepsilon) = -1$.

En Wessel concludeerde droogjes: “Hieruit zien we dat ε wordt $\sqrt{-1}$ ”.

Makkelijker vermenigvuldigen

Wessel bekeek vervolgens de werking van de vermenigvuldiging op de eenheidscirkel. Een straal van de eenheidscirkel met richtingshoek v is te schrijven als $\cos v + \varepsilon \sin v$. Als we twee stralen, met richtingshoeken u en v hebben volgt, per definitie

$$(\cos u + \varepsilon \sin u) \cdot (\cos v + \varepsilon \sin v) = \cos(u + v) + \varepsilon \sin(u + v)$$

Maar dankzij de bekende gonioformules is $\cos(u + v) + \varepsilon \sin(u + v)$ gelijk aan:

$$\cos v \cdot \cos u - \sin v \cdot \sin u + \varepsilon(\cos v \cdot \sin u + \cos u \cdot \sin v)$$

en dit krijgen we ook als we het product zouden uitschrijven door haakjes weg te werken en $\varepsilon^2 = -1$ te gebruiken.

Conclusie: haakjes wegwerken mag ook bij dergelijke vermenigvuldigingen.

Makkelijker vermenigvuldigen

Dit leidt tot de volgende stelling.

Stelling

Gegeven vier (gerichte) lijnen a , b , c , en d van willekeurige lengte en wel zo dat $a + \varepsilon b$ en $c + \varepsilon d$ in hetzelfde vlak liggen als het lijnstuk $+1$. Het product $(a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d)$ verkrijgt men door de haakjes weg te werken: het is gelijk aan $ac - bd + \varepsilon(ad + bc)$. Hierbij gebruikt men dat $\varepsilon^2 = -1$.

Makkelijker vermenigvuldigen

Bewijs.

De lengte van $a + \varepsilon b$ noemen we A en de richtingshoek v ; en $c + \varepsilon d$ heeft lengte C en richtingshoek u .

Maar dan geldt $a + \varepsilon b = A \cos v + A \varepsilon \sin v$ en $c + \varepsilon d = C \cos u + C \varepsilon \sin u$ zodat $a = A \cos v$, $b = A \sin v$, $c = C \cos u$, en $d = C \sin u$.

Per definitie geldt dan $(a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d) = AC(\cos(v + u) + \varepsilon \sin(v + u))$ en dat is weer gelijk aan

$$AC(\cos v \cdot \cos u - \sin v \cdot \sin u) + AC\varepsilon(\cos v \cdot \sin u + \cos u \cdot \sin v)$$

Vervang nu $AC \cos v \cdot \cos u$ door ac , $AC \sin v \cdot \sin u$ door bd , enzovoort.

Dan krijgen we wat te bewijzen was. □

Makkelijker vermenigvuldigen, en delen

Op dezelfde wijze leidde Wessel formules af voor quotiënten:

$$\frac{1}{c + \varepsilon d} = \frac{c - \varepsilon d}{c^2 + d^2}$$

en dus

$$\frac{a + \varepsilon b}{c + \varepsilon d} = \frac{(a + \varepsilon b)(c - \varepsilon d)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + \varepsilon(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

Worteltrekken

Om Wessel te citeren: als m geheel is geeft $\cos \frac{v}{m} + \varepsilon \sin \frac{v}{m}$ indien m maal met zichzelf vermenigvuldigd $\cos v + \varepsilon \sin v$.

En dus $(\cos v + \varepsilon \sin v)^{\frac{1}{m}} = \cos \frac{v}{m} + \varepsilon \sin \frac{v}{m}$.

Uit eerdere regels volgt

$$\cos\left(-\frac{v}{m}\right) + \varepsilon \sin\left(-\frac{v}{m}\right) = \frac{1}{\cos \frac{v}{m} + \varepsilon \sin \frac{v}{m}} = \frac{1}{(\cos v + \varepsilon \sin v)^{\frac{1}{m}}} = (\cos v + \varepsilon \sin v)^{-\frac{1}{m}},$$

dus geldt de formule ongeacht of m positief of negatief is.

En hiermee vinden we dat voor gehele getallen m en n geldt

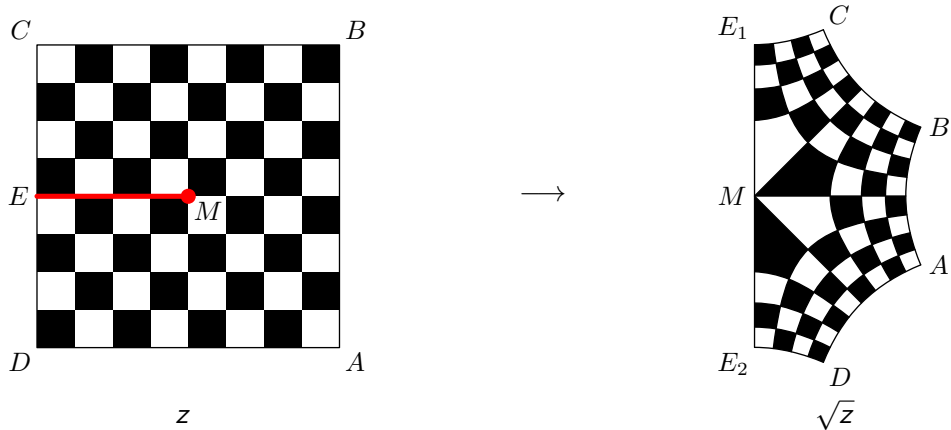
$$(\cos v + \varepsilon \sin v)^{\frac{n}{m}} = \cos \frac{n}{m} v + \varepsilon \sin \frac{n}{m} v$$

Er staan vrijwel geen voorbeelden in het artikel, maar hier dan wel.

Hiermee kunnen we de waarden van uitdrukkingen als $\sqrt[n]{b + c\sqrt{-1}}$ of $\sqrt[m]{a + \sqrt[n]{b + c\sqrt{-1}}}$ vinden. Zo stelt $\sqrt[3]{4\sqrt{3} + 4\sqrt{-1}}$ een lijn voor, wiens lengte gelijk is aan 2 voor, en wiens hoek met de eenheid gelijk is aan 10° .

Worteltrekken

De voorkant van de brochure en de syllabus illustreert de vierkantswortel.



Maar Wessel was nog niet klaar: als m geheel is en $\pi = 360^\circ$ (sic) dan neemt $(\cos v + \varepsilon \sin v)^{\frac{1}{m}}$ slechts de volgende m verschillende waarden aan: $\cos \frac{v}{m} + \varepsilon \sin \frac{v}{m}$, $\cos \frac{\pi+v}{m} + \varepsilon \sin \frac{\pi+v}{m}$, $\cos \frac{2\pi+v}{m} + \varepsilon \sin \frac{2\pi+v}{m}$, $\dots$, tot en met $\cos \frac{(m-1)\pi+v}{m} + \varepsilon \sin \frac{(m-1)\pi+v}{m}$.

Dat legde hij netjes uit met behulp van de periodicititeit van de sinus en cosinus.

e-macht

Er volgt een interessant kort paragraafje (niet in de syllabus opgenomen).

Zonder de hoek je weten welke het lijnstuk $1 + x$ met de eenheid maakt heeft men, zolang de lengte van x kleiner is dan 1, de gelijkheid

$$(1 + x)^m = 1 + \frac{mx}{1} + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot x^2 + \&c$$

Als we deze som ordenen naar de machten van m dan verandert deze in

$$1 + \frac{ml}{1} + \frac{m^2 l^2}{1 \cdot 2} + \frac{m^3 l^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \&c$$

waarin

$$l = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&c$$

... en l is dan de som van een directe en een loodrechte lijn, de directe is a , en de loodrechte is $b\sqrt{-1}$.

Als we nu $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \&c = e$ zetten kunnen we $(1 + x)^m$ of $1 + \frac{ml}{1} + \frac{m^2 l^2}{1 \cdot 2} + \frac{m^3 l^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \&c$ noteren als $e^{ma+mb\sqrt{-1}}$.

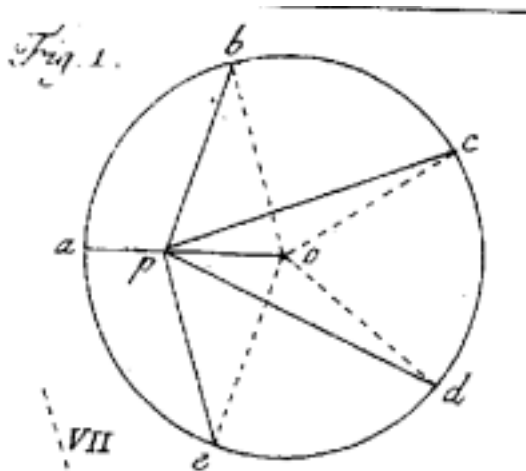
Dit betekent dat $(1 + x)^m$ lengte e^{ma} heeft, en een richtingshoek wiens maat gelijk is aan mb , waar m positief of negatief kan zijn.

Zo kunnen de richtingen van lijnen in het vlak op nog een andere manier uitgedrukt worden, namelijk met behulp van natuurlijke logaritmen.

Wessel schreef van plan te zijn dit later nader uit te werken maar het is daar niet van gekomen.

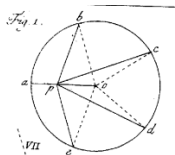
De stelling van Cotes

Wessel sluit dit deel af met een bewijs van een stelling van Cotes over regelmatige veelhoeken.



De Stelling van Cotes

De Stelling van Cotes luidt als volgt: Als ab, bc, cd, de, ea bogen zijn, n in aantal en $\frac{360}{n} = \frac{\pi}{n}$ graden bevattend, en de straal oa gelijk aan r gesteld wordt, $ao = -r$, $op = z$, $po = -z$, en p is het eindpunt van de lijnen ap, bp, cp, dp, ep : dan geldt $ap \cdot bp \cdot cp \cdot dp \cdot ep = z^n - r^n$.



Uit de rekenregels volgt dat

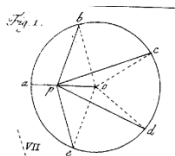
1. $ap = z - r$,
2. $bp = z - r(\cos \frac{\pi}{n} + \varepsilon \sin \frac{\pi}{n})$,
3. $cp = z - r(\cos \frac{2\pi}{n} + \varepsilon \sin \frac{2\pi}{n})$,
4. $dp = z - r(\cos \frac{3\pi}{n} + \varepsilon \sin \frac{3\pi}{n})$,
5. $ep = z - r(\cos \frac{4\pi}{n} + \varepsilon \sin \frac{4\pi}{n})$,
6. of eigenlijk $ep = z - r(\cos \frac{(n-1)\pi}{n} + \varepsilon \sin \frac{n-1\pi}{n})$.

De Stelling van Cotes

We hebben eerder

vastgesteld dat de wortels van de vergelijking $x^n - r^n = 0$ gelijk zijn aan

$$1, r(\cos \frac{\pi}{n} + \varepsilon \sin \frac{\pi}{n}), r(\cos \frac{2\pi}{n} + \varepsilon \sin \frac{2\pi}{n}), \dots, r(\cos \frac{(n-1)\pi}{n} + \varepsilon \sin \frac{n-1\pi}{n})$$



Maar dat betekent dat $z^n - r^n$ te schrijven is als $ap \cdot bp \cdot cp \cdot dp \cdot ep$.

Hieruit volgt dat de lengte van $z^n - r^n$ gelijk is aan het product van de lengten van ap , bp , cp , dp , ep .

Vanaf nu heeft π weer de gewone betekenis . . .