

Wat iedereen over Complexe Functies moet weten IV

De krenten uit de pap

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Antwerpen, 20 september 2025

Over intervallen

We spreken af: als $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continu is dan is de integraal van f over $[a, b]$ gedefinieerd door

$$\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b u(t) \, dt + i \cdot \int_a^b v(t) \, dt$$

Hier zijn u en v respectievelijk het reële en imaginaire deel van f ; dat wil zeggen $f(t) = u(t) + i \cdot v(t)$.

Krommen

Definitie

Een kromme in $\mathbb{C}$ is een *continue* functie $\kappa : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ die *stuksgewijs glad* is, dat wil zeggen: κ' bestaat en is continu behalve in een eindig aantal punten, in die punten is κ' wel links- en rechtscontinu.

In iets meer woorden: het interval $[a, b]$ is verdeeld in een eindig aantal deelintervallen $[a_i, b_i]$ waarop κ continu is met continue afgeleide.

De *lengte* van κ is gedefinieerd als $L_\kappa = \int_a^b |\kappa'(t)| dt$.

We noemen κ een *gesloten kromme* als $\kappa(a) = \kappa(b)$

Krommen

Wat voorbeelden.

Een recht lijnstuk dat twee punten α en β verbindt.

Gegeven door $\kappa : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, met $\kappa(t) = \alpha + t(\beta - \alpha)$.

Er geldt $\kappa'(t) = \beta - \alpha$ en $L_\kappa = |\beta - \alpha|$. We noteren het lijnstuk vaak als $[\alpha, \beta]$.

Een driehoek met hoekpunten α , β , en γ .

Definieer $\kappa : [0, 3] \rightarrow \mathbb{C}$ door

$$\kappa(t) = \begin{cases} \alpha + t(\beta - \alpha) & 0 \leq t \leq 1 \\ \beta + (t - 1)(\gamma - \beta) & 1 \leq t \leq 2 \\ \gamma + (t - 2)(\alpha - \gamma) & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

Deze functie is echt *stuksgewijs* glad: de afgeleide bestaat en is continu, behalve in $t = 1$ en $t = 2$. De beeldverzameling is de driehoek die we vaak als $[\alpha, \beta, \gamma]$ noteren.

Krommen

Cirkels

Als $\alpha \in \mathbb{C}$ en $r > 0$ definieer dan $\kappa_{\alpha,r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ door $\kappa_{\alpha,r}(t) = \alpha + r \cdot \exp(it)$. Dit is de cirkel om α met straal r .

De *eenheidscirkel* ε is de cirkel $\kappa_{0,1}$; de cirkel om 0 met straal 1 dus.

De driehoeken en cirkels zijn gesloten krommen, de rechte lijnstukken niet.

Herhaling: de kromme is de *functie*, niet de beeldverzameling.

De integraal

De algemene situatie is deze: we hebben een open verzameling U , een (meestal analytische) functie $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, en een kromme $\kappa : [a, b] \rightarrow U$.

Definitie

De *integraal* van f over κ is als volgt gedefinieerd.

$$\int_{\kappa} f(z) \, dz = \int_a^b f(\kappa(t)) \cdot \kappa'(t) \, dt$$

Waarbij de rechterintegraal de som is van de integralen over intervallen waarop κ' continu is.

Opgave

Schrijf $\kappa(t) = x(t) + i \cdot y(t)$ en $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$. Schrijf nu de definitie van de integraal helemaal uit in termen van x , y , u , en v .

De integraal

We rekenen de integralen uit die we echt nodig hebben.

Laat $k \in \mathbb{Z}$. We berekenen $\int_{\varepsilon} z^k dz$, waarbij ε de eenheidscirkel is.

Per definitie geldt

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon} z^k dz &= \int_0^{2\pi} \exp(ikt) \cdot i \exp(it) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \exp((k+1)it) \cdot i dt\end{aligned}$$

Als $k = -1$ dan staat er $\int_0^{2\pi} i dt$ en dat is gelijk aan $2\pi i$.

Als $k \neq -1$ dan staat er

$$\left[\frac{\exp((k+1)it)}{(k+1)i} \cdot i \right]_0^{2\pi}$$

en dat is gelijk aan 0.

De integraal

Samengevat

$$\int_{\varepsilon} z^k \, dz = \begin{cases} 2\pi i & k = -1 \\ 0 & k \neq -1 \end{cases}$$

Opgave

Toon aan dat de uitkomsten ook niet veranderen als we de positie en straal veranderen.
Dus als $\kappa_{\alpha,r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven is door $\kappa_{\alpha,r}(t) = \alpha + r \cdot \exp(it)$ dan geldt eveneens

$$\int_{\kappa_{\alpha,r}} (z - \alpha)^k \, dz = \begin{cases} 2\pi i & k = -1 \\ 0 & k \neq -1 \end{cases}$$

Veel integralen zijn nul

Twee belangrijke gevolgen.

Stelling

Toon aan: als p een polynoom is en κ een cirkel in $\mathbb{C}$ dan geldt $\int_{\kappa} p(z) \, dz = 0$.

Lijkt niet erg opwindend, maar is wel belangrijk.

Maar niet allemaal

De volgende stelling klinkt al een stuk interessanter.

Stelling

*Laat p een polynoom zijn en $\alpha \in \mathbb{C}$. Neem één van de cirkels om α , zeg $\kappa_{\alpha,r}$.
Dan geldt*

$$\int_{\kappa_{\alpha,r}} \frac{p(z)}{z - \alpha} dz = 2\pi i \cdot p(\alpha)$$

Bewijs.

Deel $p(z)$ door $z - \alpha$ met rest: $p(z) = q(z)(z - \alpha) + p(\alpha)$.

De integraal wordt dan

$$\int_{\kappa_{\alpha,r}} q(z) dz + \int_{\kappa_{\alpha,r}} \frac{p(\alpha)}{z - \alpha} dz \quad \square$$

Ons doel

Laten zien dat de opgave en de stelling voor alle analytische functies gelden.

In de syllabus wordt dit netjes uitgewerkt.

Omwille van de tijd plukken we hier alleen de vruchten.

De centrale stelling

Stelling (Cauchy-Goursat-Pringsheim)

*Laat U een open deelverzameling zijn van $\mathbb{C}$ en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ een analytische functie.
Laat verder $[\alpha, \beta, \gamma]$ een driehoek zijn die met zijn binnengebied geheel binnen U ligt.
Dan geldt $\int_{[\alpha, \beta, \gamma]} f(z) \, dz = 0$.*



De eerste vrucht: de Fresnel-integralen

Dit zijn $\int_0^\infty \cos x^2 \, dx$ en $\int_0^\infty \sin x^2 \, dx$.

Met behulp van “De centrale stelling” kunnen we laten zien dat

$$\int_0^\infty \cos x^2 \, dx = \int_0^\infty \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{2} \int_0^\infty \exp(-x^2) \, dx = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}$$

Volledige uitwerking in de syllabus.

Een citaat van Kelvin

Once when lecturing to a class he [Lord Kelvin] used the word “mathematician,” and then interrupting himself asked his class: “Do you know what a mathematician is?” Stepping to the blackboard he wrote upon it:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Then putting his finger on what he had written, he turned to his class and said: “A mathematician is one to whom that is as obvious as that twice two makes four is to you. Liouville was a mathematician.”

Stervormige gebieden

Definitie

Een open deelverzameling U van $\mathbb{C}$ is *stervormig* als er een punt α in U is zodanig dat voor elk (ander) punt β van U het lijnstuk $[\alpha, \beta]$ geheel binnen U ligt. Het punt α noemen we een *centrum* voor U .

Voorbeelden

Het hele complexe vlak is stervormig; een open cirkelschijf $B(\alpha, r)$ is stervormig; het bovenhalfvlak $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ is stervormig.

In deze gevallen kan elk punt als centrum dienen.

De verzameling $\mathbb{C}^-$ is stervormig.

Welke punten kunnen als centrum dienen?

De verzameling $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ is *niet* stervormig.

Primitieven

Stelling

Laat U een open en stervormige deelverzameling van $\mathbb{C}$ zijn en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ een analytische functie. Dan heeft f op U een primitieve.

Een *primitieve* van f is (natuurlijk) een functie $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ met $F' = f$.

Als F een primitieve van f is en $\kappa : [a, b] \rightarrow U$ een kromme dan geldt

$$\int_{\kappa} f(z) \, dz = F(\kappa(b)) - F(\kappa(a))$$

In het bijzonder $\int_{\kappa} f(z) \, dz = 0$ als κ gesloten is.

De Integraalstelling van Cauchy-Goursat

Stelling

Als U een stervormige open deelverzameling van $\mathbb{C}$ is, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ een analytische functie, en $\kappa : [0, 1] \rightarrow U$ een gesloten kromme, dan geldt $\int_{\kappa} f(z) \, dz = 0$.

Dit is het eerste van de twee doelen die we ons gesteld hebben.

We wisten dit voor polynomen; nu weten we het voor alle analytische functies.

De tweede vrucht: Hoofdstelling van de Algebra

Stelling (Hoofdstelling van de Algebra)

Laat p een polynoom zijn met complexe coëfficiënten en van graad 1 of hoger. Dan is er een complex getal z zó dat $p(z) = 0$.

Het bewijs gebruikt niet meer dan de Integraalstelling voor de eenheidscirkel.

Het bewijs gaat (natuurlijk) uit het ongerijmde.

We nemen aan dat $p(z)$ een polynoom is met complexe coëfficiënten en zonder nulpunten.

We mogen aannemen dat $p(x) \in \mathbb{R}$ als $x \in \mathbb{R}$.

Schrijf $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0$, dan is

$p(z) \cdot (\overline{a_n} z^n + \overline{a_{n-1}} z^{n-1} + \cdots \overline{a_1} z + \overline{a_0})$ ook een polynoom zonder nulpunten en met reële waarden op de reële as.

Vervang, indien nodig, $p(z)$ door dat polynoom.

De tweede vrucht: Hoofdstelling van de Algebra

De functie $p(x)$ heeft geen reële nulpunten en is dus tekenvast op $\mathbb{R}$.
In het bijzonder is $p(2 \cos t)$ tekenvast op $[0, 2\pi]$.

En dus is

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{p(2 \cos t)} dt$$

ongelijk aan 0.

En de tegenspraak komt nu: de integraal is ook gelijk aan 0.

De tweede vrucht: Hoofdstelling van de Algebra

We bouwen de integraal om tot een integraal over de eenheidscirkel ε .

Als volgt: we hebben $\varepsilon(t) = \exp(it)$ met $0 \leq t \leq 2\pi$.

Dan geldt $\varepsilon'(t) = i\varepsilon(t)$ en ook $2 \cos t = \varepsilon(t) + \varepsilon(t)^{-1}$.

Dan geldt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{p(2 \cos t)} dt &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{p(\varepsilon(t) + \varepsilon(t)^{-1})} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{p(\varepsilon(t) + \varepsilon(t)^{-1})} \frac{\varepsilon'(t)}{\varepsilon'(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{i\varepsilon(t) \cdot p(\varepsilon(t) + \varepsilon(t)^{-1})} \cdot \varepsilon'(t) dt \\ &= \int_{\varepsilon} \frac{1}{iz \cdot p(z + z^{-1})} dz \end{aligned}$$

Waarom zou die integraal gelijk aan 0 zijn?

De tweede vrucht: Hoofdstelling van de Algebra

Schrijf $p(z + z^{-1})$ uit, het resultaat ziet er zo uit:

$$a_n z^{-n} + \cdots + a_n z^n = z^{-n}(a_n + \cdots + a_n z^{2n})$$

Het deel tussen de haakjes noemen we $q(z)$.

Merk op

1. $q(0) = a_n$, dus $q(0) \neq 0$
2. als $z \neq 0$ dan $p(z + z^{-1}) \neq 0$, en $z^{-n} \neq 0$, dus $q(z) \neq 0$
3. op de eenheidscirkel geldt

$$\frac{1}{z \cdot p(z + z^{-1})} = \frac{z^{n-1}}{q(z)}$$

En dus ...

De tweede vrucht: Hoofdstelling van de Algebra

... geldt

$$\int_{\varepsilon} \frac{1}{iz \cdot p(z + z^{-1})} dz = \frac{1}{i} \cdot \int_{\varepsilon} \frac{z^{n-1}}{q(z)} dz = 0$$

want $z^{n-1} \cdot q(z)^{-1}$ is analytisch op $\mathbb{C}$.

Herinner ...

... van daarnet

Stelling

*Laat p een polynoom zijn en $\alpha \in \mathbb{C}$. Neem één van de cirkels om α , zeg $\kappa_{\alpha,R}$.
Dan geldt*

$$\int_{\kappa_{\alpha,R}} \frac{p(z)}{z - \alpha} dz = 2\pi i \cdot p(\alpha)$$

Die stelling geldt algemener:

Stelling

*Laat p een polynoom zijn en $\alpha \in \mathbb{C}$. Neem één van de cirkels om α , zeg $\kappa_{\alpha,R}$.
Dan geldt **voor elke z binnen de cirkel $\kappa_{\alpha,R}$***

$$\int_{\kappa_{\alpha,R}} \frac{p(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i \cdot p(z)$$

Herinner ...

Het bewijs begint als daarnet: deel $p(\zeta)$ door $\zeta - z$ met rest:

$$p(\zeta) = (\zeta - z) \cdot q(\zeta) + p(z)$$

(ζ is de variabele, z is de constante)

Wat nieuw is is deze gelijkheid:

$$\int_{K_{\alpha,R}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i$$

voor elke z **ongelijk aan het middelpunt van de cirkel**.

Mogelijkheid 1

Reken de integraal weer direct uit, via $\kappa_{\alpha,R}(t) = \alpha + R \exp(it)$, en door z te schrijven als $\alpha + r \exp(i\theta)$.

$$\begin{aligned} \int_{\kappa_{\alpha,R}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta &= \int_0^{2\pi} \frac{iR \exp(it)}{R \exp(it) - r \exp(i\theta)} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - rR \cos(t - \theta) - irR \sin(t - \theta)}{R^2 - 2rR \cos(t - \theta) + r^2} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - rR \cos(t) - irR \sin(t)}{R^2 - 2rR \cos(t) + r^2} dt \end{aligned}$$

(de laatste = volgt uit de periodiciteit van sinus en cosinus)

Veel plezier!!

Mogelijkheid 2

Zie pagina's 43 en 44 van de syllabus.

Slim gebruik van de Integraalstelling geeft

$$\int_{\kappa_{\alpha,R}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\kappa_{z,s}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i$$

waar $\kappa_{z,s}$ een kleine cirkel met middelpunt z is binnen $\kappa_{\alpha,R}$.

De algemene versie

Stelling (Integraalformule van Cauchy)

Laat U een stervormige open deelverzameling van $\mathbb{C}$ zijn en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ een analytische functie. Verder nemen we $\alpha \in U$ en $R > 0$ zó dat de cirkel $\kappa_{\alpha,R}$ binnen U ligt.

Dan geldt voor elke $z \in B(\alpha, R)$ dat

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_{\alpha,R}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

De derde vrucht: integralen uitrekenen

Als voorbeeld rekenen we

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos t} dt$$

uit.

Gebruik de methode die we bij de Hoofdstelling van de Algebra gebruikten, schrijf $z = \exp(it)$ en maak een integraal over de eenheidscirkel.

$$\int_{\varepsilon} \frac{1}{5 + 2(z + \frac{1}{z})} \frac{1}{iz} dz = \frac{1}{i} \int_{\varepsilon} \frac{1}{2z^2 + 5z + 2} dz$$

De derde vrucht: integralen uitrekenen

Ontbind de noemer: $2z^2 + 5z + 2 = (2z + 1)(z + 2) = 2(z + 2)(z + \frac{1}{2})$. Met $f(z) = (2z + 4)^{-1}$ staat er deze integraal:

$$\frac{1}{i} \int_{\epsilon} \frac{f(z)}{z + \frac{1}{2}} dz$$

En de waarde is $\frac{1}{i} \cdot 2\pi i \cdot f(-\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}\pi$

Kan het algemener?

Eerste antwoord: ja, de stelling geldt ook voor driehoeken, vierkanten, ellipsen, en andere gesloten krommen **zolang f analytisch is op het binnengebied**

Tweede antwoord: ja, we kunnen meer formules uit de formule halen.

Hoe dan? Door een meetkundige reeks te herkennen in

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_{\alpha,R}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

We voegen slim iets toe aan de noemer (en halen het ook weer weg):

$$\zeta - z = (\zeta - \alpha) - (z - \alpha) = (\zeta - \alpha) \left(1 - \frac{z - \alpha}{\zeta - \alpha} \right)$$

Kan het algemener?

En als de modulus van $z - \alpha$ kleiner is dan die van $\zeta - \alpha$ kunnen we schrijven

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - \alpha) \left(1 - \frac{z - \alpha}{\zeta - \alpha}\right)} = \frac{1}{(\zeta - \alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - \alpha}{\zeta - \alpha}\right)^n$$

Stop dit in de integraalformule, er komt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - \alpha}{\zeta - \alpha}\right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta \times (z - \alpha)^n \end{aligned}$$

Kan het algemener?

En dat levert ons de volgende stelling.

Stelling

Laat U een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ zijn en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Laat verder $\alpha \in U$ en $R > 0$ zó zijn dat $B(\alpha, R) \subseteq U$.

Op de schijf $B(\alpha, R)$ geldt dan

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n$$

met

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$$

en hierbij kan κ elke cirkel zijn met middelpunt α en straal kleiner dan R .

De Algemene Integraalformule van Cauchy

Als $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch is dan is f oneindig vaak differentieerbaar op U en de afgeleiden zijn direct in de functie zelf uit te drukken:

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\kappa} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta$$

met κ een cirkel met middelpunt α die met zijn binnengebied binnen U ligt.

Taylorreeksen

We hebben gezien: als $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch is, $\alpha \in U$, en R zó is dat $B(\alpha, R) \subseteq U$ dan is f op $B(\alpha, R)$ gelijk aan zijn Taylorreeks:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n$$

We kunnen R maximaal nemen met $B(\alpha, R) \subseteq U$ (als $U = \mathbb{C}$ nemen we $R = \infty$).

De convergentiestraal is dus ten minste zo groot als die maximale R .

$(x^2 + 1)^{-1}$ en de arctangens

De functie $\arctan x$ en zijn afgeleide $(x^2 + 1)^{-1}$ laten zien dat sommige dingen pas in het complexe vlak duidelijk worden.

We hebben rond 0:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \&c \text{ ad infinitum}$$

en ook

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11} + \&c \text{ ad infinitum}$$

(even Euler nadoen).

$(x^2 + 1)^{-1}$ en de arctangens

Je zou verwachten dat die functies die zo mooi zijn op $\mathbb{R}$ machtreeksen met convergentiestraal ∞ zouden moeten hebben.

Maar de functie $(z^2 + 1)^{-1}$ is slechts analytisch op $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$.

En dat vertelt ons, zonder dat we die reeksen kennen, dat hun convergentiestralen gelijk aan 1 zullen zijn.

Er ligt dus vlak naast de reële as een onoverkomelijk probleem wat de analyciteit van $\arctan z$ en $(z^2 + 1)^{-1}$ betreft.

Drie pijlers

We hebben nu de drie pijlers onder de Complexe-Functietheorie gezien.

- ▶ de Cauchy-Riemannvergelijkingen: gebruikt door Riemann om het meetkundige gedrag van analytische functies *als afbeeldingen* te bestuderen
- ▶ de Integraalstellingen: gebruikt door Cauchy om heel veel reële integralen uit te rekenen
- ▶ machtreeksen: de aanpak van Weierstrass die daarmee ook de andere twee pijlers een stevige(r) fundering gaf