14: Bewijs uit het ongerijmde

Tá scéilín agam

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Voorjaar 2021

Wat is het?

Een manier om indirect dingen te bewijzen.
Bijvoorbeeld:

Voorbeeld 6, pagina 20

Er zijn geen priemgetallen p, q, en r zó dat $p^2 + q^2 = r^2$.

Anders geformuleerd: voor alle priemgetallen p, q, en r geldt $p^2 + q^2 \neq r^2$.

Wat is het?

Hoe bewijs je dat?

- Loop alle priemgetallen na ...
- Stel p, q, en r zijn priemgetallen.
  ... (mooie redenering) ...
  Conclusie: $p^2 + q^2 \neq r^2$.

Als je dit probeert zul je zien dat je niet ver komt.

Wat is het?

Kijk terug naar pagina 20: het staat er wat verborgen, maar eigenlijk doet men dit:

Stel er zijn priemgetallen p, q, en r waarvoor geldt $p^2 + q^2 = r^2$.

Aan het eind, op pagina 21, moet men het opgeven:
de veronderstelling leidt tot onmogelijkheden.

De conclusie is: dergelijke priemgetallen zijn er niet.

Algemeen

Een bewijs uit het ongerijmde is hier een soort invulschema van:

Te bewijzen:

Een (interessante) bewering B.

Bewijs

Stel dat B niet geldt.

...

(een gewone redenering)

...

Iets onmogelijks. We roepen Tegenspraak!

Conclusie: B is waar.

Waarom zou je dat doen?

Kijk naar het voorbeeld van de priemgetallen.

Stel p, q, en r zijn priemgetallen. Te bewijzen: $p^2 + q^2 \neq r^2$.

Stel p, q, en r zijn priemgetallen die voldoen aan $p^2 + q^2 = r^2$.

Met de tweede kun je meer, je hebt een vergelijking om aan te sleutelen.

Het bewijs zelf is net als alle andere uit de hele handleiding.
Het Stel niet geeft net een extra opstapje.

Voorbeeld

Het bekendste voorbeeld is natuurlijk

Stelling

$\sqrt{2}$ is niet te schrijven als een breuk.

Bewijs

Stel $\sqrt{2}$ is *wel* te schrijven als een breuk.
Dat wil zeggen: stel m en n zijn natuurlijke getallen zó dat $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.
(Ons extra opstapje: we hebben twee getallen om mee te spelen.)

Tussenstap: vereenvoudig de breuk zó dat $\mathrm{ggd}(m, n) = 1$.

Voor m en n geldt dus $2n^2 = m^2$ (daar kunnen we wat mee).

Voorbeeld

Bewijs (vervolg)

We delen m en n door 3, met rest: $m = 3p + r$ en $n = 3q + s$, met $0 \leq r, s < 3$.
NB r en s zijn niet allebei gelijk aan 0, want ...
Kijk naar de kwadraten: $m^2 = 3(3p^2 + 2pr) + r^2$ en $n^2 = 3(3q^2 + 2qs) + s^2$.
De mogelijkheden voor r^2 en s^2 zijn: 0, 1, en 4.
Maar $4 = 3 + 1$
Dus: m^2 en n^2 kunnen alleen rest 0 of 1 hebben bij deling door 3 (en niet allebei 0).
En dus: $2n^2$ heeft rest 0 of 2 bij deling door 3.
Nu komen de problemen ...

Voorbeeld

Bewijs (vervolg)

... we hebben drie mogelijkheden voor de resten van m^2 en n^2:

1. 0 en 1: dus m^2 heeft rest 0 en $2n^2$ heeft rest 2
2. 1 en 0: dus m^2 heeft rest 1 en $2n^2$ heeft rest 0
3. 1 en 1: dus m^2 heeft rest 1 en $2n^2$ heeft rest 2

Daar is het onmogelijke! We roepen nu Tegenspraak!

Conclusie: $\sqrt{2}$ is niet te schrijven als een breuk.

Een mooie opgave

Opgave C2, tweede ronde 2011 (iets ingekort)

Bij een wiskundewedstrijd maken 30 leerlingen elk 16 opgaven. Ze kunnen bij elke opgave 0, 5, of 10 punten scoren.
Aan het eind blijkt dat meer dan de helft van de 480 scores een 10 is, en dat er evenveel 5-en als 0-en zijn gescoord.
Bewijs dat er zeker twee leerlingen zijn die dezelfde totaalscore hebben behaald.