15: Extremenprincipe

Tá scéilín agam

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Voorjaar 2021

Wat is het?

Het extremenprincipe, I

In een niet-lege eindige verzameling getallen is er altijd een grootste en ook altijd een kleinste getal.

Het extremenprincipe, II

In elke niet-lege verzameling natuurlijke getallen is er altijd een kleinste getal.

Hoe gebruik je het?

Net als bij het Bewijs uit het Ongerijmde levert het een extra ingrediënt voor je redenering.
Bijvoorbeeld . . .

Hoe gebruik je het?

... bij deze opgave

Hongaarse Wiskundeolympiade 1964

Op een dansfeest dansen meisjes en jongens met elkaar.

- elk meisje danst met ten minste één jongen, maar niet met alle jongens
- elke jongen danst met ten minste één meisje, maar niet met alle meisjes

Toon aan: er zijn meisjes M_1 en M_2, en jongens J_1 en J_2 zó dat

- M_1 danst met J_1, en M_2 danst met J_2
- M_1 danst niet met J_2, en M_2 danst niet met J_1

We kunnen wel een opstapje gebruiken.

Het dansfeest

Probeer het Extremenprincipe eens.

Neem een meisje M_1 dat met het grootste aantal jongens heeft gedanst.

Nu hebben we iets (iemand) om mee te werken. We gaan de gegevens gebruiken.

Er is een jongen J_2 waar M_1 niet mee gedanst heeft.

Er is een meisje M_2 waar J_2 mee gedanst heeft.

Na het ene opstapje zijn we al een stuk verder: we hebben al twee meisjes, M_1 en M_2, gevonden, en een jongen J_2.

Maar hoe komen we aan een geschikte jongen J_1?

Het dansfeest

We hebben nog niet gebruikt dat M_1 met het grootste aantal jongens heeft gedanst.
Kijk naar de verzamelingen $\mathcal{J}_1$ en $\mathcal{J}_2$ van jongens waar M_1 en M_2 respectievelijk mee gedanst hebben.

Jongen J_2 zit in $\mathcal{J}_2$ maar niet in $\mathcal{J}_1$.

Omdat $\mathcal{J}_1$ evenveel of meer elementen heeft als $\mathcal{J}_2$ zit er een jongen J_1 in $\mathcal{J}_1$ maar niet in $\mathcal{J}_2$.

En dat is de jongen die we zochten.

Nogmaals $\sqrt{2}$

Vaak combineer je het extremenprincipe met een bewijs uit het ongerijmde.
We bewijzen nog een keer dat $\sqrt{2}$ niet te schrijven is als een breuk.

Nogmaals $\sqrt{2}$

Stel $\sqrt{2}$ is *wel* te schrijven als een breuk: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

Dan geldt: $n\sqrt{2}$ is een natuurlijk getal (namelijk m).

De verzameling A van natuurlijke getallen k waarvoor $k\sqrt{2}$ een natuurlijk getal is is dus niet leeg.

Er is dus een kleinste getal in A, noem het k.

Omdat $1 < \sqrt{2} < 2$ geldt $k < k\sqrt{2} < 2k$ en dus $k\sqrt{2} - k < k$.

Dus $k\sqrt{2} - k$ is een natuurlijk getal dat kleiner is dan k.

En ook $(k\sqrt{2} - k)\sqrt{2} = 2k - k\sqrt{2}$ is een natuurlijk getal.

Dus $k\sqrt{2} - k$ zit in A en is kleiner dan het kleinste element van A. Tegenspraak!

Conclusie: $\sqrt{2}$ is *niet* te schrijven als een breuk.