16: Ladenprincipe

Tá scéilín agam

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Voorjaar 2021

Wat is het?

Een ervaringsfeit.

Ladenprincipe

Als je meer dingen hebt dan laden en je stopt de dingen in de laden dan is er een lade met meer dan één ding er in.

In een boek uit 1622

Necesse est, duos hominum, habere totidem numero pilos, aureos, & similia
Het is noodzakelijk waar dat twee mannen evenveel haren, goudstukken, en dergelijke hebben.

Haren op hoofden

In een later boek, *Récréation mathematique*, uit 1624, staat een bewijs.

Bewijs

Voor de duidelijkheid nemen we aan dat er 100 mannen zijn die ten hoogste 99 haren kunnen hebben. Ik had ook drie miljoen mannen kunnen nemen maar dat is niet belangrijk voor het bewijs.
Bekijk 99 mannen. Als er twee evenveel haren hebben zijn we klaar. Anders moet er iemand zijn met één haar, iemand met twee haren, enzovoort tot nummer 99 die 99 haren heeft.
Hoeveel haren kan de honderste man hebben? Ten hoogste 99, dus een aantal kleiner dan 100: er zijn twee mannen met evenveel haren.

Haren op hoofden

Wij zouden nu zeggen: neem 99 laden, genummerd 1 tot en met 99.

Stop elke man in de lade met als nummer het aantal haren op zijn hoofd.

We hebben 100 mannen en 99 laden, er zijn dus twee mannen die in dezelfde lade terecht komen.

Dirichlet

Het Ladenprincipe wordt ook vaak het Principe van Dirichlet genoemd.
Deze gebruikte het in de getaltheorie, om stellingen als de volgende te bewijzen.

Veelvouden van θ

Neem een irrationaal getal θ en een natuurlijk getal Q groter dan 1.
Dan zijn er gehele getallen q en p zó dat $1 \leq q < Q$ en

$$|q\theta - p| \leq \frac{1}{Q}$$

Dirichlet

Je kunt de ongelijkheid ook schrijven als $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{qQ}$ en omdat $q < Q$ volgt er dus:

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$$

Dirichlet: bewijs van de stelling

We gebruiken de volgende notatie:

- $[x]$ is het grootste gehele getal dat kleiner dan of gelijk is aan x (de *Entier* van x)
- $\{x\} = x - [x]$

De getallen

$$0,\ \{\theta\},\ \{2\theta\},\ \ldots,\ \{(Q-1)\theta\},\ 1$$

(onze dingen) liggen in het interval $[0,1]$.

Verdeel het interval $[0,1]$ in de intervallen $[\frac{i}{Q}, \frac{i+1}{Q})$ voor $0 \leq i \leq Q-2$ en $[\frac{Q-1}{Q}, 1]$ (dat zijn onze laden).

Dirichlet: bewijs van de stelling

We hebben $Q+1$ dingen en Q laden. Er is dus een lade met (zeker) twee dingen erin.

Er zijn dus twee natuurlijke getallen r_1 en r_2 en twee gehele getallen s_1 en s_2 zó dat $0 \leq r_1 < r_2 < Q$ en

$$\left|(r_1\theta - s_1) - (r_2\theta - s_2)\right| \leq \frac{1}{Q}$$

($r_1 = 0$ is mogelijk: als één van de dingen 0 of 1 is).

Neem dan $q = r_2 - r_1$, en $p = s_2 - s_1$.
Dan hebben we $1 \leq q < Q$ en

$$|q\theta - p| \leq \frac{1}{Q}$$

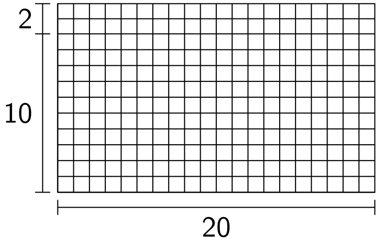
Wat voorbeelden

Bomen planten

Als je in een tuin van 25 bij 42 meter 250 planten neerzet zullen er twee planten dichter dan 3 meter bij elkaar komen te staan.

Hint

Verdeel de rechthoek van onder naar boven in vierkanten en rechthoeken: 10 rijen van 20 vierkanten met zijden van 2,1 meter en bovenaan twee rijen van rechthoeken van $2{,}1 \times 2$ meter.



Hoeveel rechthoeken zijn er? En hoe groot zijn hun diameters?

Wat voorbeelden

De boekenkast van Erdős

Als je $n^2 + 1$ verschillende getallen op een willekeurige volgorde zet zullen er $n + 1$ van die getallen zijn die (van links naar rechts) een stijgende rij of een dalende rij vormen.

Hint

De getallen zijn, van links naar rechts: x_1, x_2, ..., x_{n^2+1}. Bij elke x_i horen twee getallen: s_i en d_i. Kijk in $\{x_1, \ldots, x_i\}$ en neem daarin het langste stijgende rijtje dat eindigt met x_i, noem de lengte s_i (dus, bijvoorbeeld: $s_1 = 1$). In $\{x_i, \ldots, x_{n^2+1}\}$ nemen we het langste dalende rijtje dat begint met x_i en noemen we de lengte d_i.
Bewijs dat alle paren (s_i, d_i) verschillend zijn en concludeer dat er een i moet zijn met $s_i > n$ of $d_i > n$.

Wat voorbeelden

Laatste cijfers

Er is een veelvoud van 2021 zó dat de laatste vier cijfers van dat veelvoud het getal 2022 vormen.

Hint

Schijf de eerste 10.000 veelvouden van 2021 (dingen) op en kijk naar hun resten bij deling door 10.000 (laden).
Als $2021m$ en $2021n$ dezelfde rest hebben en $m \leq n$ dan is $2021(n-m)$ deelbaar door 10.000. Maar $\text{ggd}(2021, 10.000) = 1$, dus is $n - m$ deelbaar door 10.000, en dus gelijk aan 0, want $1 \leq m, n \leq 10.000$.
Elk veelvoud moet alleen in een lade zitten, dus alle laden zijn bezet, ook de lade met nummer 2022.

Wat voorbeelden

Machten

Stel m en n zijn natuurlijke getallen groter dan 1 en met $\mathrm{ggd}(m,n) = 1$.
Dan is er een $k > 0$ zó dat de rest van m^k bij deling door n gelijk is aan 1.

Hint

Dit gaat bijna net als in het vorige voorbeeld. Deel de machten van m (de dingen) door n en schrijf de resten (de laden) op. Onder de eerste $n+1$ machten hebben er twee dezelfde rest, zeg $k < l$ en $m^l - m^k$ is deelbaar door n. Wat zegt dit over $m^k(m^{l-k} - 1)$?

Wat voorbeelden

Dertien of meer getallen

Stel X is een verzameling van meer dan twaalf (dertien of meer dus) reële getallen. Dan zijn er a en b in X die voldoen aan

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} < 2-\sqrt{3}$$

Hint

Nummer dertien van getallen als $x_1, \ldots, x_{13}$. Elk getal x_i is de tangens van een hoek α_i in het interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (dingen). Verdeel het interval in 12 even lange deelintervallen (laden): $(-\frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{12}, -\frac{\pi}{2} + (k+1)\frac{\pi}{12}]$ $(k = 0, \ldots, 10)$, en $(\frac{5\pi}{12}\pi, \frac{\pi}{2})$. Er zijn dus i en j met $0 < \alpha_j - \alpha_i < \frac{\pi}{12}$. Gebruik nu de gonioformule voor $\tan(\alpha - \beta)$ en laat zien dat $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.