De wiskunde van kleurplaten

Jan van Neerven

De decembermaand is niet alleen de maand van Sint Nicolaas en de Kerstman, maar ook van de kleurplaten. Talloze kinderen kleuren in deze maand stoomboten, kerstballen, en wat al niet meer. In hun bezigheid worden zij in het geheel niet gehinderd door de wiskundige problemen die het inkleuren van een tekening met zich meebrengt. In dit stukje hoop ik U te laten zien dat kleuren inderdaad geen triviale bezigheid is!

Iedereen herinnert zich uit zijn of haar jeugd dat het met een harde, scherp geslepen potloodpunt slecht kleuren is. Niet alleen levert zo'n punt krassen op, maar het kleuren duurt ook veel langer omdat de strepen smaller zijn. Deze observatie leidt tot een voor de hand liggende vraag: stel eens dat we de beschikking hadden over een *ideaal* potlood, dat wil zeggen een potlood met puntdikte nul. Kunnen we met zo'n potlood nog steeds kleuren?

Om serieus aan de slag te kunnen moeten we eerst een wiskundige herformulering van de vraag geven. Een *kleurplaat* is het eenheidsvierkant $K = [0,1] \times [0,1]$ in het euclidische vlak (wiskundigen houden het graag zo eenvoudig mogelijk) en een *kleuring* is een continue functie $\phi\colon [0,1] \to K$. Het domein $[0,1]$ zien we als het ter beschikking staande tijdsinterval en op ieder tijdstip $t \in [0,1]$ geeft $\phi(t) \in K$ de positie van het potlood op de kleurplaat. De eis dat $\phi\colon [0,1] \to K$ continu is komt er op neer dat we het potlood niet van het papier mogen nemen.

Definitie. *Een* volledige kleuring *is een kleuring* $\phi\colon [0,1] \to K$ *met de eigenschap dat voor ieder punt* $(x,y) \in K$ *de verzameling* $\{t \in [0,1]\colon \phi(t) = (x,y)\}$ *niet-leeg is.*

Met andere woorden: een volledige kleuring is een kleuring waarbij ieder punt van de kleurplaat gekleurd wordt. In wiskundige termen eisen we dus dat ϕ surjectief is. Nu komt de hamvraag: *bestaan er volledige kleuringen?* U bent wellicht geneigd om onmiddelijk 'nee' te roepen (alle kindervlijt ten spijt), want K bevat immers 'veel meer' punten dat het interval $[0,1]$? Na het college Getal en Ruimte weet u echter beter en kijkt u er niet meer van op dat er zelfs bijecties tussen $[0,1]$ en K bestaan. Expliciete voorbeelden zijn bovendien relatief eenvoudig te construeren. Zulke bijecties zijn echter nooit continu: uit een beroemde stelling van de Nederlandse wiskundige L.E.J. Brouwer volgt dat er geen continue bijecties $\phi\colon [0,1] \to K$ bestaan.

FIGUUR 1: L.E.J. BROUWER (1881-1966) en G. PEANO (1858-1932)

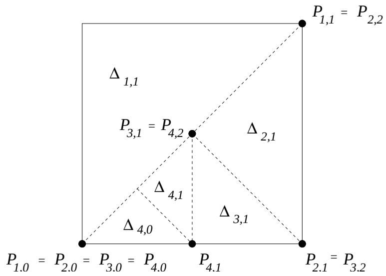
Dit laat echter de mogelijkheid open dat er continue surjecties $\phi\colon [0,1] \to K$ bestaan, en dus volledige kleuringen. En inderdaad is het daadwerkelijke bestaan van volledige kleuringen rond 1900 door de Italiaanse wiskundige G. Peano bewezen. Voor velen kwam dit als een grote verrassing. Toch is de constructie achteraf bezien niet erg ingewikkeld en we zullen uitleggen hoe een en ander in zijn werk gaat. Het blijkt handig te zijn enige notaties in te voeren.

Voor iedere $n = 1, 2, 3, \ldots$ verdelen we K in 2^n rechthoekige driehoeken, die we $\Delta_{n,0}, \ldots, \Delta_{n,2^n-1}$ zullen noemen. In iedere driehoek $\Delta_{n,k}$ zullen we één van de hoekpunten het *beginpunt* noemen; dit punt noteren we als $P_{n,k}$. De constructie van de driehoeken en hun beginpunten is inductief.

We beginnen met $n = 1$. We verdelen K langs de hoofddiagonaal in twee rechthoekige driehoeken. De driehoek onder de diagonaal noemen we $\Delta_{1,0}$ en als beginpunt nemen we de oorsprong: $P_{1,0} := (0,0)$. De driehoek boven de diagonaal noemen we $\Delta_{1,1}$ en als beginpunt nemen we het punt $P_{1,1} := (1,1)$.

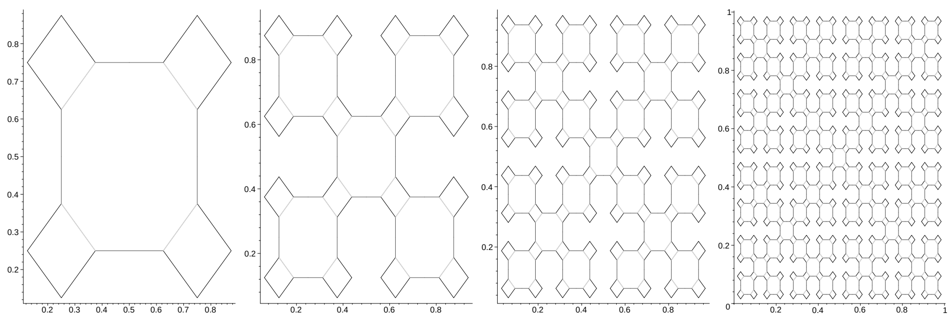
De inductiestap gaat als volgt. Stel dat we de rechthoekige driehoeken $\Delta_{n,k}$ en hun beginpunten $P_{n,k}$ hebben geconstrueerd voor alle $k = 0, \ldots, 2^n - 1$ en $n = 1, \ldots, N$. We verdelen iedere driehoek $\Delta_{N,k}$ in tweeën door vanuit de rechte hoek de middelloodlijn neer te laten op de overstaande zijde. De twee driehoekjes die zo ontstaan zijn wederom rechthoekig. Het driehoekje dat het punt $P_{N,k}$ bevat noemen we $\Delta_{N+1,2k}$; als beginpunt nemen we $P_{N+1,2k} := P_{N,k}$. Het andere driehoekje noemen we $\Delta_{N+1,2k+1}$; als beginpunt $P_{N+1,2k+1}$ nemen we het hoekpunt bij de rechte hoek van $\Delta_{N,k}$. Zie figuur 2.

Het nut van de beginpunten is er in gelegen dat de driehoek $\Delta_{n,k}$ steeds grenst aan het beginpunt $P_{n,k+1}$ van de volgende driehoek $\Delta_{n,k+1}$. Dit zien



FIGUUR 2: Constructie van enkele van de driehoeken $\Delta_{n,k}$ en hun beginpunten $P_{n,k}$. In deze figuur is $\Delta_{3,0} = \Delta_{4,0} \cup \Delta_{4,1}$, $\Delta_{2,0} = \Delta_{4,0} \cup \Delta_{4,1} \cup \Delta_{3,1}$ en $\Delta_{1,0} = \Delta_{4,0} \cup \Delta_{4,1} \cup \Delta_{3,1} \cup \Delta_{2,1}$.

we met inductie aan de hand van de zojuist beschreven constructie. Dientengevolge kunnen we voor iedere $n = 1, 2, 3, \ldots$ een kleuring $\phi_n \colon [0,1] \to K$ construeren die achtereenvolgens de driehoeken $\Delta_{n,0}$ t/m $\Delta_{n,2^n-1}$ aandoet, en wel *in deze volgorde*. In figuur 3 zijn voorbeelden van zulke kleuringen afgebeeld voor $n = 2, 4, 6$ en 8. Het idee is nu dat in de limiet $n \to \infty$ een kleuring $\phi \colon [0,1] \to K$ ontstaat die alle punten aandoet en dus volledig is.



FIGUUR 3: Voorbeelden van kleuringen ϕ_n (voor $n = 2, 4, 6, 8$) die achtereenvolgens de driehoeken $\Delta_{n,0}$ t/m $\Delta_{n,2^n-1}$ aandoen.

De precieze constructie van ϕ is als volgt. Kies $t \in [0,1]$ willekeurig en zij $k_n(t)$ het kleinste gehele getal k waarvoor geldt dat $t \in I_{n,k} := [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$. Per definitie geldt dus $t \in I_{n,k_n(t)}$ en het is gemakkelijk in te zien dat $I_{1,k_1(t)} \supseteq I_{2,k_2(t)} \supseteq \ldots$. Omdat $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(I_{n,k_n(t)}) = 0$ bevat de doorsnede van de intervallen $I_{n,k_n(t)}$ precies één punt, namelijk t. Om dezelfde reden bevat de doorsnede van de bijbehorende driehoeken $\Delta_{n,k_n(t)}$ eveneens precies één punt, dat we $(x(t), y(t))$ zullen noemen. We definiëren nu een afbeelding

$\phi\colon [0,1] \to K$ door

$$\phi(t) := (x(t), y(t)).$$

Ga zelf na dat $\phi(\frac{k}{2^n}) = P_{n,k}$ voor alle $k = 0, \ldots, 2^n - 1$ en $n = 1, 2, 3, \ldots$. Door gebruik te maken van de onderlinge ligging van de driehoeken $\Delta_{n,k}$ is het niet moeilijk de te bewijzen:

Stelling. *De afbeelding ϕ is een volledige kleuring.*

De beperking van ϕ tot ieder interval $I_{n,k}$ levert bovendien een volledige kleuring van de driehoek $\Delta_{n,k}$ op.

De zojuist beschreven volledige kleuring blijkt een aantal wonderlijke eigenschappen te bezitten.

- *De kleuring ϕ heeft geen eindige booglengte* (het begrip 'booglengte' wordt in het college Vectoranalyse behandeld). Dit is eenvoudig in te zien als we ons realiseren dat ϕ alle punten $P_{n,k}$ aandoet. Nu is, voor iedere $n \geq 1$, de afstand tussen twee opeenvolgende beginpunten $P_{n,k}$ en $P_{n,k+1}$ precies gelijk aan $(\sqrt{2})^{-n+1}$, zodat de booglengte van ϕ minstens $2^n \cdot (\sqrt{2})^{-n+1} = (\sqrt{2})^{n+1}$ bedraagt. De 'afstand' waarover we ons potlood moeten verplaatsen is dus 'oneindig'!

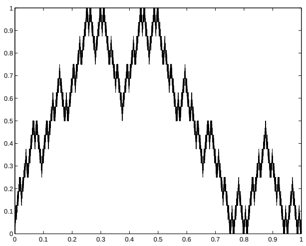
- *De componentfuncties van ϕ zijn in geen enkel punt differentieerbaar.* Als voorheen schrijven we $\phi(t) = (x(t), y(t))$. We kiezen $t \in [0,1]$ vast. Nu levert de beperking van ϕ tot $I_{n,k}$ een volledige kleuring van $\Delta_{n,k}$ op en de hoogte van $\Delta_{n,k}$ gelijk is aan $(\frac{1}{2}\sqrt{2})^n$. Hiervan gebruikmakend kunnen we voor iedere $n \geq 1$ een $t_n \in [0,1]$ vinden zodanig dat t en t_n in hetzelfde interval $I_{n,k}$ liggen en

$$|x(t_n) - x(t)| \geq \tfrac{1}{2} \cdot (\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^n.$$

Omdat de lengte van het interval $I_{n,k_n(t)}$ is gelijk aan $(\frac{1}{2})^n$ geldt ook $|t_n - t| \leq (\frac{1}{2})^n$, zodat

$$\left|\frac{x(t_n) - x(t)}{t_n - t}\right| \geq \left|\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sqrt{2})^n}{(\frac{1}{2})^n}\right| = \tfrac{1}{2}(\sqrt{2})^n.$$

Wegens $\lim_{n\to\infty} t_n = t$ en $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(\sqrt{2})^n = \infty$ zien we dat de functie x niet differentieerbaar is in het punt t. Het bewijs dat de functie y niet differentieerbaar is in het punt t gaat net zo. Ons potlood heeft dus op geen enkel tijdstip een 'snelheid'!



FIGUUR 4: Grafiek[1] van de componentfunctie $t \mapsto x(t)$.

- *De componentfuncties van ϕ zijn op geen enkel deelinterval van* $[0,1]$ *monotoon.* Inderdaad, ieder deelinterval van $[0,1]$ bevat een interval $I_{n,k}$ voor voldoende grote n. De beperking van ϕ tot dit interval levert een volledige kleuring van de driehoek $\Delta_{n,k}$, en als we kijken in welke volgorde de beginpunten worden aangedaan van alle driehoekjes die inductief uit $\Delta_{n,k}$ worden geconstrueerd, zien we meteen dat beide coordinaatfuncties niet monotoon zijn op het interval $I_{n,k}$. Met andere woorden: de kleuring is 'bibberig' in ieder punt!

Literatuur

1. [1] V. Rovenski, "Geometry of Curves and Surfaces with MAPLE", Birkha"user Verlag, 2000.

   Wie aan de slag wil kan de bijbehorende MAPLE files downloaden via http://math2.haifa.ac.il/ROVENSKI/rovenski/Birkhauser.html.

2. [2] A.C.M. van Rooij en W.H. Schikhof, "A Second Course on Real Functions", Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1982.

   Een leuk boek voor wie denkt dat hij alles al weet over de reële getallen.

[1]Met dank aan Mark Veraar.