

SITZUNG VOM 19. JANUAR 1942

Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialsystems.

PAUL KOEBBE

zum sechzigsten Geburtstag gewidmet.

Von
Eberhard Hopf.

1. Einleitung.

Es sei

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, \dots, x_n, \mu) \quad (i = 1, \dots, n)$$

oder in Vektorschreibweise

$$(1.1) \quad \dot{x} = \mathfrak{F}(x, \mu)$$

ein reelles Differentialsystem mit reellem Parameter μ . \mathfrak{F} sei analytisch in x und μ , wenn x in einem Gebiete G liegt und $|\mu| < c$ ist. (1.1) soll eine für $|\mu| < c$ analytische Schar stationärer Lösungen $x = \tilde{x}(\mu)$ in G besitzen,

$$\mathfrak{F}(\tilde{x}(\mu), \mu) = 0.$$

Die charakteristischen Exponenten der stationären Lösung sind bekanntlich die Eigenwerte der Eigenwertaufgabe

$$\lambda a = \mathfrak{Q}_\mu(a),$$

wo \mathfrak{Q}_μ den nur von μ abhängigen linearen Operator bedeutet, welcher durch Weglassen der nicht linearen Glieder in der Reihenentwicklung von \mathfrak{F} um $x = \tilde{x}$ entsteht. Die Exponenten sind entweder reell oder paarweise konjugiert komplex und hängen von μ ab.

Setzt man lediglich voraus, daß für den speziellen Wert $\mu = 0$ eine stationäre Lösung x_0 in G vorhanden ist und daß kein char. Exp. Null ist, so gibt es bekanntlich von selbst für jedes μ genügend kleinen Betrages in einer passenden Umgebung von $x = x_0$ genau eine stationäre Lösung $\tilde{x}(\mu)$ mit $\tilde{x}(0) = x_0$; und $\tilde{x}(\mu)$ ist analytisch bei $\mu = 0$.

Beim Durchgang durch $\mu = 0$ soll nun kein char. Exp. verschwinden, aber es soll einer (und damit der konjugierte) die imaginäre Achse überschreiten.

Diese Situation tritt bei nichtkonservativen mechanischen Systemen, z. B. in der Hydrodynamik häufig auf. Unter jener Voraussetzung gibt es, wie folgender Satz aussagt, in der Umgebung der Werte $\xi = \xi_0$, $\mu = 0$ stets periodische Lösungen von (1.1).

Satz. Für $\mu = 0$ seien genau zwei charakteristische Exponenten rein imaginär. Ihre stetigen Fortsetzungen $\alpha(\mu)$, $\bar{\alpha}(\mu)$ mögen den Bedingungen

$$(1.2) \quad \alpha(0) = -\bar{\alpha}(0) \neq 0, \quad \Re(\alpha'(0)) \neq 0$$

genügen. Dann existiert eine Schar reeller periodischer Lösungen $\xi = \xi(t, \varepsilon)$, $\mu = \mu(\varepsilon)$ mit den Eigenschaften $\mu(0) = 0$ und $\xi(t, 0) = \bar{\xi}(0)$, aber $\xi(t, \varepsilon) \neq \bar{\xi}(\mu(\varepsilon))$ für alle hinreichend kleinen $\varepsilon \neq 0$. $\mu(\varepsilon)$ und $\xi(t, \varepsilon)$ sind an der Stelle $\varepsilon = 0$ bzw. an jeder Stelle $(t, 0)$ analytisch. Dasselbe gilt von der Periode $T(\varepsilon)$, und es ist

$$T(0) = \frac{2\pi}{|\alpha(0)|}.$$

Zu beliebig großem L gibt es zwei positive Zahlen a und b derart, daß für $|\mu| < b$ außer der stationären Lösung und den Lösungen der Scharhälfte $\varepsilon > 0$ keine periodischen Lösungen existieren, deren Periode kleiner als L ist, und die ganz in $|\xi - \bar{\xi}(\mu)| < a$ liegen.¹⁾ Die periodischen Lösungen existieren bei hinreichend kleinem μ entweder nur für $\mu > 0$ oder nur für $\mu < 0$ (Allgemeiner Fall), oder aber nur für $\mu = 0$.

Die charakteristischen Exponenten der periodischen Lösung $\xi(t, \varepsilon)$ sind bekanntlich die Eigenwerte der Eigenwertaufgabe

$$(1.3) \quad \dot{v} + \lambda v = \mathcal{Q}_{t, \varepsilon}(v),$$

wo $v(t)$ dieselbe Periode $T = T(\varepsilon)$ wie die Lösung haben soll. \mathcal{Q} ist der längs der periodischen Lösung gebildete lineare Operator; er hängt von t periodisch mit der Periode T ab und ist in t, ε bei $\varepsilon = 0$ analytisch. Die char. Exp. sind nur mod $(2\pi i/T)$ bestimmt und hängen stetig von ε ab. Einer von ihnen ist bekanntlich Null; denn ξ hängt nicht explizit von t ab, also ist

$$\lambda = 0, \quad v = \dot{\xi}(t, \varepsilon)$$

Lösung der Eigenwertaufgabe. Die Exponenten gehen mod $(2\pi i/T_0)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ stetig in diejenigen der stationären Lösung $\dot{\xi}(0)$ von (1.1), $\mu = 0$, über. Nach Voraussetzung streben dabei genau zwei Exponenten gegen die imaginäre Achse. Einer von ihnen ist der identisch verschwindende. Der andere $\beta = \beta(\varepsilon)$ muß reell und bei $\varepsilon = 0$ analytisch sein, $\beta(0) = 0$. Von den Koeffizienten in

1) Die andere Scharhälfte muß demnach dieselben Lösungskurven darstellen.

$$\begin{aligned}\mu &= \mu_1 \varepsilon + \mu_2 \varepsilon^2 + \dots, \\ \beta &= \beta_1 \varepsilon + \beta_2 \varepsilon^2 + \dots\end{aligned}$$

folgt direkt aus dem obigen Satz $\mu_1 = \beta_1 = 0$. Darüber hinaus wird im folgenden die einfache Beziehung

$$(1.4) \quad \beta_2 = -2\mu_2 \Re(\alpha'(0))$$

bewiesen, die mir vorher nicht begegnet ist.

Sie gibt im allgemeinen Falle $\mu_2 \neq 0$ über die Stabilitätsverhältnisse Auskunft. Haben z. B. für $\mu < 0$ alle char. Exp. der stationären Lösung $\bar{x} = \bar{x}(\mu)$ negativen Realteil (Stabilität, eine kleine Umgebung von \bar{x} schrumpft für $t \rightarrow \infty$ auf \bar{x} zusammen), so gilt folgende Alternative. Entweder zweigen die period. Lös. nach Unstabilwerden der stat. Lös. von dieser ab ($\mu > 0$); dann haben alle char. Exp. der period. Lös. negativen Realteil (Stabilität, ein dünner Schlauch um die period. Lös. schrumpft für $t \rightarrow \infty$ auf diese zusammen). Oder die Schar existiert vorher ($\mu < 0$); dann sind die period. Lös. unstabil.¹⁾

Da man in der Natur bei genügend langer Beobachtungszeit nur stabile Lösungen beobachten kann, ist die Abzweigung einer period. Lös. von einer stat. Lös. nur nach dem Unstabilwerden der letzteren beobachtbar. Solche Beobachtungen sind in der Hydromechanik wohlbekannt. Z. B. bei Umströmung eines festen Körpers, wo die Strömung bei kleiner Anströmungsgeschwindigkeit stationär ist, nach genügender Steigerung derselben jedoch periodisch wird (periodische Wirbelablösung). Es handelt sich hier um Beispiele nicht konservativer Systeme (Zähigkeit der Flüssigkeit).²⁾ Bei konservativen Systemen ist die Voraussetzung (1. 2) bekanntlich nie erfüllt; mit λ ist stets auch $-\lambda$ char. Exponent.

Obwohl mir die Behandlung der Abzweigungsaufgabe auf Grund der Voraussetzung (1. 2) in der Literatur nicht begegnet ist, glaube ich kaum, daß an dem obigen Satz etwas wesentlich Neues ist; die Methoden sind von Poincaré vor etwa 50 Jahren entwickelt worden³⁾ und gehören heute zum

1) In $n = 2$ Dimensionen sofort in die Augen springend.

2) Ein hydrodynamisches Beispiel, wo man bei vorsichtigstem Experimentieren (sehr langsame Parameteränderung) immer an derselben Stelle plötzliches Abbrechen der stationären Bewegung beobachtet, wo man also auf Eintreten des zweiten Falles der Alternative schließen kann, ist mir nicht bekannt.

3) Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Die obigen periodischen Lösungen stellen den einfachsten Grenzfall von Poincarés periodischen Lösungen zweiter Gattung (genre) dar. Vgl. Tome III, Kap. 28, 30, 31. Poincaré hat diese Lösungen im Hinblick auf himmelsmechanische Anwendungen nur bei kanonischen Differential-

klassischen Gedankengut der Theorie der periodischen Lösungen im Kleinen. Da aber der Satz von Interesse in der nichtkonservativen Mechanik ist, schien mir eine ausführliche Darstellung nicht unnütz zu sein. Um die Durchführung bei Systemen mit unendlich vielen Freiheitsgraden, z. B. bei den Grundgleichungen der Bewegung einer zähen Flüssigkeit, zu erleichtern, habe ich allgemeinere Methoden der linearen Algebra speziellen Hilfsmitteln (z. B. Wahl eines speziellen Koordinatensystems) nach Möglichkeit vorgezogen.

Natürlich kann es ebensogut vorkommen, daß bei $\mu = 0$ ein reeller char. Exp. $\alpha(\mu)$ der stat. Lös. $\tilde{x}(\mu)$ die imaginäre Achse überschreitet,

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha'(0) \neq 0,$$

während die anderen dieser Achse fernbleiben. In diesem Falle zweigen nicht period., sondern wieder stat. Lös. ab.¹⁾ Wir begnügen uns mit der Anführung der Sätze in diesem einfacheren Fall. Es gibt eine von \tilde{x} verschiedene analytische Schar $x = x^*(\varepsilon)$, $\mu = \mu(\varepsilon)$, stationärer Lös. mit $\mu(0) = 0$, $x^*(0) = \tilde{x}(0)$. Ist $\mu_1 \neq 0$ (allgemeiner Fall) so existieren die Lös. für $\mu \geq 0$. Von dem durch Null gehenden char. Exp. $\beta(\varepsilon)$ gilt die Analogie zu (1.4)

$$\beta_1 = -\mu_1 \alpha'(0).$$

Ist \tilde{x} stabil für $\mu < 0$, unstabil für $\mu > 0$, so folgt daraus das Umgekehrte von x^* (Beobachtet man \tilde{x} für $\mu < 0$, so beobachtet man x^* für $\mu > 0$). Im Ausnahmefalle $\mu_1 = 0$ ist die Sachlage anders. Ist $\mu_2 \neq 0$, so existieren die neuen Lösungen entweder nur für $\mu > 0$ oder nur für $\mu < 0$. Es gibt jeweilig zwei Lösungen für festes μ (eine mit $\varepsilon > 0$, eine mit $\varepsilon < 0$). Hier gilt

$$\beta_2 = -2\mu_2 \alpha'(0),$$

woraus sich eine analoge Alternative wie oben über die Stabilität ergibt. Dabei sind entweder beide Lösungen x^* stabil oder beide unstabil.

systemen ausführlich studiert (mit Hilfe der Integralinvarianten dieser Systeme), wo die Dinge schwieriger sind als oben. Poincaré benützt den Hilfsparameter ε in Kap. 30 bei der Koeffizientenberechnung (die Rechnung in unserem § 4 ist im wesentlichen dieselbe) aber nicht beim Existenzbeweis, der dadurch einfacher wird.

An eine kurze Bemerkung in Tome I, S. 156, knüpft Painlevé an: Les petits mouvements périodiques des systèmes. Comptes Rendus Paris XXIV (1897), S. 1222. Der dort ausgesprochene allgemeine Satz bezieht sich auf den Fall $\mu = 0$ in unserem System (1.1), kann aber nicht allgemein richtig sein. Für die Gültigkeit dieser Aussage muß \tilde{x} speziellen Bedingungen genügen.

1) Ein Beispiel aus der Hydrodynamik ist die Flüssigkeitsbewegung zwischen zwei konzentrisch rotierenden Zylindern (G. I. Taylor).

2. Die Existenz der periodischen Lösungen.

Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die stationäre Lösung in den Nullpunkt fällt,

$$\mathfrak{F}(0, \mu) = 0.$$

Die Entwicklung von \mathfrak{F} nach Potenzen der x_i sei

$$(2.1) \quad \mathfrak{F}(x, \mu) = \mathfrak{L}_\mu(x) + \mathfrak{Q}_\mu(x, x) + \mathfrak{R}_\mu(x, x, x) + \dots,$$

wo die Vektorfunktionen

$$\mathfrak{L}_\mu(x), \quad \mathfrak{Q}_\mu(x, \eta), \quad \mathfrak{R}_\mu(x, \eta, \delta), \quad \dots$$

von jedem Argumentvektor linear abhängen und symmetrische Funktionen dieser Vektoren sind.

Die Substitution

$$(2.2) \quad x = \varepsilon \eta$$

führt (1.1) in

$$(2.3) \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{L}_\mu(\eta) + \varepsilon \mathfrak{Q}_\mu(\eta, \eta) + \varepsilon^2 \mathfrak{R}_\mu(\eta, \eta, \eta) + \dots$$

über. Die rechte Seite ist an der Stelle $\varepsilon = \mu = 0$, $\eta = \eta^0$ (η^0 beliebig) analytisch von ε , μ , η^0 abhängig.

Wir betrachten den Fall $\varepsilon = 0$ in (2.3) der für die Existenzfrage entscheidende Bedeutung hat, d. h. die homogene lineare Differentialgleichung

$$(2.4) \quad \dot{z} = \mathfrak{L}_\mu(z).$$

Die konjugiert komplexen charakteristischen Exponenten $\alpha(\mu)$, $\bar{\alpha}(\mu)$, von denen in der Voraussetzung die Rede war, sind für alle kleinen $|\mu|$ einfach. In den zugehörigen Lösungen

$$(2.5) \quad e^{\alpha t} a, \quad e^{\bar{\alpha} t} \bar{a}$$

von (2.4) ist daher der komplexe Vektor a bis auf einen komplexen Skalarfaktor eindeutig bestimmt; \bar{a} ist der konjugierte Vektor. Ferner gibt es keine Lösungen der Form

$$(2.6) \quad e^{\alpha t}(tb + c), \quad b \neq 0.$$

$\alpha(\mu)$ ist bei $\mu = 0$ analytisch. Man kann einen festen reellen Vektor $e \neq 0$ so wählen, daß für alle kleinen $|\mu|$ $\alpha \cdot e \neq 0$ ausfällt, sobald $\alpha \neq 0$ ist. $\alpha = \alpha(\mu)$ wird dann durch die Forderung

$$(2.7) \quad \alpha(\mu) \cdot e = \frac{1}{\alpha(\mu) - \bar{\alpha}(\mu)} \quad (\bar{e} = e \neq 0)$$

eindeutig festgelegt. Nach Voraussetzung ist

$$(2.8) \quad \bar{\alpha}(0) = -\alpha(0) \neq 0.$$

$\alpha(\mu)$ ist bei $\mu = 0$ analytisch.

Die reellen Lösungen von (2.4), die lineare Kombination von (2.5) sind, haben die Form

$$(2.9) \quad \mathfrak{z} = ce^{\alpha t} \alpha + \bar{c} e^{\bar{\alpha} t} \bar{\alpha}$$

mit komplexem Skalar c . Sie bilden eine von zwei reellen Parametern abhängige Schar; der eine Parameter ist ein Proportionalitätsfaktor, während der andere eine additive Konstante in t darstellt (die Lösungen bilden eine nur einparametrische Kurvenschar). Wegen $\bar{c} = \bar{c}$ ist

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathfrak{z}} \cdot e &= c \alpha \cdot e + \bar{c} \bar{\alpha} \cdot e \\ \dot{\mathfrak{z}} \cdot e &= c \alpha \alpha \cdot e + \bar{c} \bar{\alpha} \bar{\alpha} \cdot e \end{aligned} \right\} t = 0.$$

Für $c = 1$ erfüllt also (2.9),

$$(2.10) \quad \mathfrak{z} = e^{\alpha t} \alpha + e^{\bar{\alpha} t} \bar{\alpha} = \mathfrak{z}(t, \mu),$$

wegen (2.7) die Bedingungen

$$(2.11) \quad t = 0: \quad \mathfrak{z} \cdot e = 0, \quad \frac{d}{dt} (\mathfrak{z} \cdot e) = 1.$$

Durch diese Bedingungen ist auch die Lösung (2.9) eindeutig bestimmt; denn aus

$$t = 0: \quad \mathfrak{z} \cdot e = \dot{\mathfrak{z}} \cdot e = 0$$

und aus (2.9) folgt wegen (2.7) und (2.8) $c = 0$; also $\mathfrak{z} = 0$.

Da nach Voraussetzung $\alpha, \bar{\alpha}$ für $\mu = 0$ die einzigen rein imaginären unter den charakteristischen Exponenten sind, stellen (2.9) für $\mu = 0$ sämtliche reellen und periodischen Lösungen von (2.4) dar. Ihre Periode ist

$$(2.12) \quad T_0 = \frac{2\pi}{|\alpha(0)|}.$$

Insbesondere ist (2.10) für $\mu = 0$ die einzige reelle und periodische Lösung mit den Eigenschaften (2.11).

Für späteren Gebrauch sei noch bemerkt, daß (2.4) für $\mu = 0$ keine Lösungen der Form

$$t p(t) + q(t)$$

haben kann, wo p und q eine gemeinsame Periode haben und p nicht identisch Null ist. Im entgegengesetzten Falle würde sich (2.4) in die beiden Gleichungen

$$\dot{p} = \mathfrak{L}_0(p), \quad p + \dot{q} = \mathfrak{L}_0(q)$$

aufspalten, und p wäre eine nichttriviale Linearkombination der Lösungen (2.5). Die Fourierentwicklung von $q(t)$ würde dann zu einer Lösung der Form (2.6) führen.

Durch Differenzieren von (2. 4) nach μ für $\mu = 0$ ergibt sich die inhomogene Differentialgleichung

$$(2. 13) \quad \dot{z}' = \mathfrak{L}_0(z') + \mathfrak{L}'_0(z); \quad \mathfrak{L}'_0 = \frac{d}{d\mu} \mathfrak{L}_\mu, \quad \mu = 0,$$

für die μ -Ableitung von (2. 10)

$$z' = t(\alpha' e^{\alpha t} a + \bar{\alpha}' e^{\bar{\alpha} t} \bar{a}) + (e^{\alpha t} \alpha' + e^{\bar{\alpha} t} \bar{\alpha}') \quad (\mu = 0).$$

Der Faktor von t ist Lösung von (2. 4). Drückt man ihn linear durch die Lösung (2. 10) und durch \dot{z} aus, so folgt mit Rücksicht auf (2. 8)

$$(2. 14) \quad \dot{z}' = t \left(\mathfrak{R}(\alpha') \dot{z} + \frac{\mathfrak{I}(\alpha')}{\alpha} \dot{z} \right) + \mathfrak{h}(t)$$

mit

$$(2. 15) \quad \mathfrak{h}(t + T_0) = \mathfrak{h}(t).$$

Nun sei

$$\eta = \eta(t, \mu, \varepsilon, \eta^0)$$

die Lösung von (2. 3), welche die Anfangsbedingung $\eta = \eta^0$ für $t = 0$ erfüllt. Sie hängt nach bekannten Sätzen an jeder Stelle $(t, 0, 0, \eta^0)$ analytisch von allen Argumenten ab. Sie ist genau dann periodisch mit der Periode T , wenn die Gleichung

$$(2. 16) \quad \eta(T, \mu, \varepsilon, \eta^0) - \eta^0 = 0$$

besteht. Bezeichnet man mit z^0 den festen Anfangswert der festen Lösung (2. 10) von (2. 4), $\mu = 0$, so ist nach Obigem (2. 16) durch die Werte

$$(2. 17) \quad T = T_0, \quad \mu = \varepsilon = 0, \quad \eta^0 = z^0$$

erfüllt. Die zu lösende Aufgabe ist, (2. 16) bei vorgegebenem ε nach T, μ, η^0 aufzulösen. Es sind dies n Gleichungen mit $n + 2$ Unbekannten. Um die Lösung eindeutig zu machen, fügen wir die zwei Gleichungen

$$(2. 18) \quad \eta^0 \cdot e = 0, \quad \dot{\eta}^0 \cdot e = 1$$

hinzu, wo e der oben eingeführte reelle Vektor ist, und wo $\dot{\eta}^0 = \dot{\eta}$ für $t = 0$ ist. Ihre Hinzufügung bedeutet keine Beschränkung der Lösungsgesamtheit im kleinen, wie im nächsten Abschnitt mitgezeigt wird. Für die Ausgangswerte $\mu = \varepsilon = 0, \eta^0 = z^0$ erfüllt nach (2. 11) die Lösung diese Gleichungen.

(2. 16) und (2. 18) haben nun bei beliebigem, hinreichend kleinem $|\varepsilon|$ genau eine Lösung

$$(2. 19) \quad T = T(\varepsilon), \quad \mu = \mu(\varepsilon), \quad \eta^0 = \eta^0(\varepsilon)$$

in einer passenden Umgebung des Wertesystems

$$(2. 20) \quad T = T_0, \quad \mu = 0, \quad \eta^0 = z^0,$$

wenn folgendes der Fall ist: die durch Differentialbildung (an der Stelle [2. 17]) nach den Variablen $T, \mu, \varepsilon, \eta^0$ gebildeten linearen Gleichungen sind für gegebenes $d\varepsilon$ eindeutig lösbar. Oder: wenn diese linearen Gleichungen für $d\varepsilon = 0$ nur die Nulllösung $dT = d\mu = d\eta^0 = 0$ haben. Dies ist der Fall, wie nun gezeigt werden soll.

Es ist

$$(2. 21) \quad \dot{\eta} = \mathfrak{L}_\mu(\eta), \quad \eta = \eta(t, \mu, 0, \eta^0).$$

Speziell ist

$$(2. 22) \quad \eta(t, \mu, 0, \mathfrak{z}^0) = \mathfrak{z}(t, \mu)$$

die Lösung (2. 10). Das Differential $d\eta(t, \mu, 0, \eta^0)$ setzt sich additiv aus den Differentialen nach den einzelnen Argumenten bei festbleibenden übrigen zusammen. Führt man für die Differentiale

$$dt, d\mu, d\eta^0$$

als unabhängige Konstante bzw. Vektoren die Bezeichnungen

$$\varrho, \sigma, u^0$$

ein, so wird das besagte Differential gleich

$$\varrho \dot{\eta} + \sigma \eta' + u,$$

wo $\dot{\eta}$ und $\eta' = \partial \eta / \partial \mu$ für $T = T_0, \mu = 0, \eta^0 = \mathfrak{z}^0$ genommen sind und wo u die Lösung von

$$\dot{u} = \mathfrak{L}_0(u)$$

mit dem Anfangswert u^0 für $t = 0$ bedeutet. Wegen (2. 22) ist $\dot{\eta} = \dot{\mathfrak{z}}(t, 0)$. Setzt man $\eta' = v$, so ist $v(t)$ die Lösung von

$$(2. 23) \quad \dot{v} = \mathfrak{L}_0(v) + \mathfrak{L}'_0(\mathfrak{z}), \quad v(0) = 0.$$

Die aus (2. 16) entstehende lineare Vektorgleichung ist nach Obigem

$$(2. 24) \quad \varrho \dot{\mathfrak{z}}(T_0) + \sigma v(T_0) + u(T_0) - u(0) = 0,$$

wo $\mathfrak{z}(t)$ die Lösung (2. 10) von

$$(2. 25) \quad \dot{\mathfrak{z}} = \mathfrak{L}_0(\mathfrak{z}),$$

$u(t)$ irgendeine Lösung dieser homogenen linearen Differentialgleichung mit konstantem \mathfrak{L}_0 und $v(t)$ die Lösung von (2. 23) bedeutet. Wir beweisen nun, daß (2. 24) nur für $\varrho = \sigma = 0$ und $u(t) = 0$ möglich ist.

Es ist nun für alle t

$$(2. 26) \quad \varrho \dot{\mathfrak{z}}(t) + \sigma [v(t + T_0) - v(t)] + u(t + T_0) - u(t) = 0.$$

Da nämlich $\mathfrak{z}(t)$ die Periode T_0 hat, ist die eckige Klammer wegen (2. 23) Lösung von (2. 25). Und da auch $\dot{\mathfrak{z}}$ Lösung von (2. 23) ist, ist die ganze linke Seite von (2. 26) Lösung von (2. 25); ihr Anfangswert ist wegen (2. 24) und

wegen $v(0) = 0$ Null, also ist sie identisch Null. Aus (2.13) und (2.23) folgt nun

$$v(t) = z'(t) + g(t), \quad \dot{g} = \mathfrak{L}_0(g).$$

Die eckige Klammer in (2.26) hat also nach (2.14) und (2.15) den Wert

$$T_0 \left[\mathfrak{R}(\alpha') \mathfrak{z}(t) + \frac{\mathfrak{S}(\alpha')}{\alpha} \dot{\mathfrak{z}}(t) \right] + [g(t + T_0) - g(t)].$$

Setzt man $u + \sigma g = w$ und

$$(2.27) \quad \sigma T_0 \mathfrak{R}(\alpha') \mathfrak{z}(t) + \left[\varrho + \sigma T_0 \frac{\mathfrak{S}(\alpha')}{\alpha} \right] \dot{\mathfrak{z}}(t) = \tilde{\mathfrak{z}}(t),$$

so folgt

$$\tilde{\mathfrak{z}}(t) + w(t + T_0) - w(t) = 0,$$

wo $w(t)$ Lösung und $\tilde{\mathfrak{z}}(t)$ eine periodische Lösung von (2.25) ist. Dies bedeutet aber, daß

$$w(t) = -\frac{t}{T_0} \tilde{\mathfrak{z}}(t) + q(t)$$

mit periodischen q ist. Solche Lösungen kann es aber, wie erwähnt, nicht geben, wenn nicht $\tilde{\mathfrak{z}} = 0$ ist. Da $\mathfrak{z}, \dot{\mathfrak{z}}$ linear unabhängig sind, folgt aus (2.27) und aus der Voraussetzung (1.2) $\sigma = 0$ und $\varrho = 0$. Wegen (2.24) hat also $u(t)$ die Periode T_0 .

Schließlich folgt aus den Gleichungen (2.18) wegen $d\eta^0 = u^0$, und da $d\dot{\eta}^0 = \dot{u}$, $t = 0$, ist,

$$u \cdot e = \dot{u} \cdot e = 0, \quad t = 0.$$

Eine periodische Lösung von $\dot{u} = \mathfrak{L}_0(u)$ mit diesen Eigenschaften muß, wie oben hervorgehoben, verschwinden. Damit ist der Beweis für die Existenz einer periodischen Schar beendet.

Die Lösungen (2.19) sind bei $\varepsilon = 0$ analytisch,

$$(2.28) \quad \begin{aligned} T &= T_0 (1 + \tau_1 \varepsilon + \tau_2 \varepsilon^2 + \dots), \\ \mu &= \mu_1 \varepsilon + \mu_2 \varepsilon^2 + \dots \end{aligned}$$

Die periodische Lösung $\eta(t, \varepsilon)$ von (2.3), und damit die periodische Lösungsschar

$$(2.29) \quad \mathfrak{x}(t, \varepsilon) = \varepsilon \eta(t, \varepsilon)$$

von (1), ist an jeder Stelle $(t, 0)$ analytisch.

Übrigens bekommt man genau dieselben periodischen Lösungen, wenn man von einem Vielfachen $m T_0$ der Periode statt von T_0 ausgeht, d. h. wenn man in einer Umgebung des Wertesystems

$$(2.30) \quad T = m T_0, \quad \mu = 0, \quad \eta^0 = \mathfrak{z}^0$$

statt (2.20) operiert. Am Beweise ändert sich nichts Wesentliches.

3. Beendigung des Beweises für den Satz.

Zu beliebig großem $L > T_0$ gibt es zwei positive Zahlen a und b mit folgender Eigenschaft. Jede periodische Lösung $x(t) \neq 0$ von (1), deren Periode kleiner als L ist, die zu einem μ mit $|\mu| < b$ gehört und welche in $|x| < a$ liegt, kommt bei passender Wahl des t -Nullpunktes in der Schar (2. 29), (2. 28), $\varepsilon > 0$, vor.

Wäre das nicht der Fall, so gäbe es eine Folge von periodischen Lösungen $x(t) \neq 0$ beschränkter Periode $T < L$ und von entsprechenden μ -Werten mit

$$(3. 1) \quad \varkappa = \underset{t}{\text{Max}} |x(t)| \rightarrow 0, \quad \mu \rightarrow 0$$

und derart, daß kein Paar $x(t), \mu$ der obigen Schar angehört. Von den Lösungen

$$\eta(t) = \frac{1}{\varkappa} x(t)$$

von (2. 3), mit \varkappa statt ε , gilt dann

$$\underset{t}{\text{Max}} |\eta(t)| = 1.$$

Man betrachte zunächst eine Teilfolge, für welche die Anfangswerte konvergieren, $\eta^0 \rightarrow \zeta^0$. Dann gilt für $|t| < L$ gleichmäßig $\eta(t) \rightarrow \zeta(t)$, wo $\zeta = \Omega_0(\zeta)$ mit $\zeta(0) = \zeta^0$ ist. Wegen $\underset{t}{\text{Max}} |\zeta| = 1$ ist ζ nicht identisch Null. ζ ist von der Form (2. 8), $c \neq 0$, und hat die Grundperiode T_0 . Man verlege in $\zeta(t)$ den t -Nullpunkt an diejenige Stelle, wo $\zeta \cdot e = 0$ wird. Dann ist dort $\dot{\zeta} \cdot e \neq 0$. Diese Größe kann > 0 angenommen werden, denn sonst könnte man es wegen

$$\zeta(t + \frac{1}{2} T_0) = -\zeta(t)$$

durch Verlegung von $t = 0$ um $\frac{1}{2} T_0$ erreichen. Es ist also

$$\zeta^0 \cdot e = 0, \quad \dot{\zeta}^0 \cdot e > 0.$$

Hieraus folgt, daß in der Nähe von ζ^0 und für kleine \varkappa und $|\mu|$ alle Lösungen der Differentialgleichung (2. 3) (\varkappa statt ε) einmal die Hyperebene $\eta \cdot e = 0$ schneiden. In diesen Schnittpunkt werde $t = 0$ gelegt. Von der betrachteten Folge $\eta(t), \varkappa, \mu$ gilt dann nach dieser Wahl ebenfalls $\eta^0 \rightarrow \zeta^0$ und

$$\dot{\eta}^0 \cdot e = 0, \quad \varrho = \dot{\eta}^0 \cdot e \rightarrow \dot{\zeta}^0 \cdot e = \varrho > 0$$

sowie $\varkappa \rightarrow 0, \mu \rightarrow 0$. Setzt man nun

$$\bar{\eta}(t) = \frac{1}{\varrho} \eta(t) = \frac{1}{\varrho \varkappa} x(t), \quad \varrho \varkappa = \varepsilon,$$

so ist $\bar{\eta}$ Lösung von (3) für die Parameterwerte $\varepsilon > 0$ und μ . Für sie gilt (2. 18),

$$\bar{\eta} \cdot e = 0, \quad \dot{\bar{\eta}} \cdot e = 1, \quad t = 0.$$

Die Perioden in der Lösungsfolge konvergieren notwendig gegen ein Vielfaches von T_0 , $m T_0$. Ferner gilt $\varepsilon \rightarrow 0$. Hieraus ergibt sich aber, daß man in der Folge von einer geeigneten Stelle ab in die erwähnte Umgebung von (2. 20) bzw. von (2. 30) kommt, in welcher es für alle genügend kleinen ε nur eine Lösung des betrachteten Gleichungssystems gibt. Die Lösungen unserer Folge müßten dann doch der obigen Schar, und zwar mit $\varepsilon > 0$, angehören, im Widerspruch zur Annahme. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aus der eben bewiesenen Tatsache folgt nun: Wenn nicht $\mu(\varepsilon) \equiv 0$ ist, so ist der erste von Null verschiedene Koeffizient in $\mu = \mu_1 \varepsilon + \mu_2 \varepsilon^2 + \dots$ von gerader Ordnung; dasselbe gilt von der Entwicklung $T = T_0(1 + \tau_1 \varepsilon + \tau_2 \varepsilon^2 + \dots)$. Denn die Lösungen der Schar für $\varepsilon < 0$ und die zugehörigen μ - und T -Werte müssen unter denen für $\varepsilon > 0$ bereits vorkommen.¹⁾

Insbesondere ist

$$(3. 2) \quad \mu_1 = \tau_1 = 0.$$

Die periodischen Lösungen existieren, wenn man sich auf hinreichend kleine $|\mu|$ und $|\varepsilon|$ beschränkt, entweder nur für $\mu > 0$ oder nur für $\mu < 0$ oder nur für $\mu = 0$.

4. Bestimmung der Koeffizienten.

Wir benötigen folgendes Kriterium über die Auflösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$(4. 1) \quad \dot{w} = \mathfrak{L}(w) + q, \quad (\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0)$$

wo $q(t)$ die Periode T_0 hat. Es sei

$$(4. 2) \quad \dot{z}^* = -\mathfrak{L}^*(z^*)$$

die zur homogenen adjungierte Differentialgleichung; \mathfrak{L}^* ist der zu \mathfrak{L} adjungierte Operator (transponierte Matrix), definiert durch

$$\mathfrak{L}(u) \cdot v \equiv u \cdot \mathfrak{L}^*(v).²⁾$$

(4. 1), wo $q(t)$ die Periode T_0 hat, hat dann und nur dann eine periodische Lösung w mit der Periode T_0 , wenn

$$(4. 3) \quad \int_0^{T_0} q \cdot z^* dt = 0$$

für alle Lösungen von (4. 2), die die Periode T_0 haben, gilt.

1) Und zwar mit einer Verschiebung des t -Nullpunktes um nahezu $T_0/2$.

2) Das innere Produkt zweier komplexer Vektoren a, b wird im folgenden durch $\sum a_i b_i$ definiert.

Dieses Kriterium folgt aus dem bekannten Kriterium für die Lösbarkeit eines gewöhnlichen linearen Gleichungssystems. Die Notwendigkeit folgt direkt aus (4. 1) und (4. 2). Daß die Bedingung hinreicht, folgt so. Die adjungierte Gleichung hat die gleichen charakteristischen Exponenten und daher ebenfalls zwei Lösungen der Form

$$(4. 4) \quad e^{\alpha t} \alpha^*, \quad e^{-\alpha t} \bar{\alpha}^*, \quad \alpha = \alpha(0) = -\bar{\alpha}(0),$$

aus denen sich alle periodischen Lösungen linear kombinieren lassen. Ferner lehrt die Entwicklung von $q(t)$ in eine Fourierreihe, daß man sich auf den Fall

$$q = e^{-\alpha t} b$$

und den analogen Fall mit α statt $-\alpha$ beschränken kann. In (4. 1) werde

$$w = e^{-\alpha t} c$$

angesetzt. (4. 1) geht dann in

$$(\alpha \mathcal{E} + \mathcal{Q}) c = b$$

über. (4. 4) und (4. 2) sind mit

$$(\alpha \mathcal{E} + \mathcal{Q})^* \alpha^* = 0$$

gleichbedeutend, während (4. 3) $b \cdot \alpha^* = 0$ lautet. Daraus folgt alles mit Hilfe des besagten Satzes.

Zweitens benötigen wir folgende Tatsache. Zu irgendeiner Lösung $z \neq 0$ von $\dot{z} = \mathcal{Q}(z)$ mit der Periode T_0 gibt es stets eine Lösung z^* der adjungierten Gleichung mit gleicher Periode derart, daß

$$\int_0^{T_0} z \cdot z^* dt \neq 0^1)$$

ist.

Im entgegengesetzten Falle hätte nämlich $w = \mathcal{Q}(w) + z$ eine Lösung w mit der Periode T_0 und $w + tz$ wäre Lösung der homogenen Differentialgleichung, im Widerspruch zur Einfachheit des charakteristischen Exponenten α .

z_1^* und z_2^* seien zwei linear unabhängige Lösungen von (4. 2) mit der Periode T_0 . Macht man von den Symbolen

$$[q]_i = \int_0^{T_0} q \cdot z_i^* dt \quad (i = 1, 2)$$

1) Übrigens ist der Integrand immer konstant.

Gebrauch, so lautet das Kriterium für die Lösbarkeit von (4. 1) unter den angegebenen Bedingungen

$$(4. 5) \quad [q]_1 = [q]_2 = 0.$$

Im übrigen kann man δ_1^* , δ_2^* so wählen, daß

$$(4. 6) \quad [\delta]_1 = [\delta]_2 = 1, \quad [\dot{\delta}]_2 = [\dot{\delta}]_1 = 0$$

wird, wo δ die Lösung (2. 10) von (2. 4), $\mu = 0$, ist (Biorthogonalisierung).

Die Aufgabe der Koeffizientenbestimmung für die Potenzreihen-Darstellung der periodischen Schar kann nun übersichtlich gelöst werden. Führt man durch

$$(4. 7) \quad t = s(1 + \tau_2 \varepsilon^2 + \tau_3 \varepsilon^3 + \dots)$$

die neue unabhängige Variable s ein, so wird wegen (2. 28) die Periode in der Lösungsschar $\eta = \eta(s, \varepsilon)$ konstant gleich T_0 . η ist als Funktion von s, ε ebenfalls an jeder Stelle $(s, 0)$ analytisch. Man hat

$$(4. 8) \quad \eta = \eta_0(s) + \varepsilon \eta_1(s) + \varepsilon^2 \eta_2(s) + \dots,$$

wo alle η_i die Periode T_0 haben. Die Ableitung nach s sei wieder durch einen Punkt gekennzeichnet. Schreibt man einfacher

$$\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}, \quad \mathfrak{L}'_0 = \mathfrak{L}', \quad \mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}, \quad \mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}, \dots,$$

so erhält man durch Einsetzen von (4. 7) und (4. 8) in (2. 3) unter Berücksichtigung von (3. 2) die rekursiven Gleichungen

$$(4. 9) \quad \dot{\eta}_0 = \mathfrak{L}(\eta_0) \quad (\eta_0 = \delta)$$

$$(4. 10) \quad \dot{\eta}_1 = \mathfrak{L}(\eta_1) + \mathfrak{D}(\eta_0, \eta_0)$$

$$(4. 11) \quad -\tau_2 \dot{\eta}_0 + \dot{\eta}_2 = \mathfrak{L}(\eta_2) + \mu_2 \mathfrak{L}'(\eta_0) + 2\mathfrak{D}(\eta_0, \eta_1) + \mathfrak{R}(\eta_0, \eta_0, \eta_0),$$

.....

aus denen die η_i, μ_i, τ_i zu bestimmen sind. Dazu kommen noch die aus (2. 18) folgenden Bedingungen

$$(4. 12) \quad \eta_k \cdot e = \dot{\eta}_k \cdot e = 0, \quad s = 0,$$

für $k = 1, 2, \dots$. In den Gleichungen kann wieder t statt s geschrieben werden. Durch (4. 10) und (4. 12) ist η_1 als periodische Funktion mit der Periode T_0 eindeutig bestimmt. Aus (4. 11) muß erst \mathfrak{L}' mit Hilfe von (2. 13) eliminiert werden. Da die Klammer im ersten Summanden von (2. 14) Lösung von $\dot{\delta} = \mathfrak{L}(\delta)$ ist, kann (2. 13)

$$(4. 13) \quad \mathfrak{R}(\alpha') \delta + \frac{\mathfrak{S}(\alpha')}{\alpha} \dot{\delta} + \dot{\eta} = \mathfrak{L}(\eta) + \mathfrak{L}'(\delta)$$

geschrieben werden. Setzt man

$$(4.14) \quad \eta_2 - \mu_2 \dot{\eta} = \mathfrak{v},$$

was wegen (2.15) die Periode T_0 hat, so folgt wegen $\mathfrak{z} = \eta_0$

$$(4.15) \quad \begin{aligned} & -\mu_2 \mathfrak{R}(\alpha') \eta_0 - \left(\tau_2 + \mu_2 \frac{\mathfrak{S}(\alpha')}{\alpha} \right) \dot{\eta}_0 \\ & + \dot{\mathfrak{v}} = \mathfrak{L}(\mathfrak{v}) + 2\mathfrak{Q}(\eta_0, \eta_1) + \mathfrak{R}(\eta_0, \eta_0, \eta_0). \end{aligned}$$

Wegen (4.6) ist daher

$$(4.16) \quad \begin{aligned} \mu_2 \mathfrak{R}(\alpha') &= -[2\mathfrak{Q}(\eta_0, \eta_1) + \mathfrak{R}(\eta_0, \eta_0, \eta_0)]_1, \\ \tau_2 + \mu_2 \frac{\mathfrak{S}(\alpha')}{\alpha} &= -[2\mathfrak{Q}(\eta_0, \eta_1) + \mathfrak{R}(\eta_0, \eta_0, \eta_0)]_2. \end{aligned}$$

Hierdurch sind nach Voraussetzung (1.2) μ_2 und τ_2 bestimmt. Man löst dann (4.15) nach \mathfrak{v} auf und gewinnt aus (4.14) und (4.12), $k=2$, η_2 eindeutig.

In analoger Weise bestimmen sich die weiteren Koeffizienten aus den späteren Rekursionsformeln. Im allgemeinen ist $\mu_2 \neq 0$. Ist $\mu_2 > 0$, so existieren die periodischen Lösungen nur für $\mu > 0$; entsprechendes gilt für $\mu_2 < 0$.

5. Die charakteristischen Exponenten der periodischen Lösungen.

Im folgenden wird teilweise von Determinanten Gebrauch gemacht, was aber vermeidbar ist. In der längs den periodischen Lösungen von (2.3) gebildeten Variationsgleichung

$$(5.1) \quad \dot{u} = \mathfrak{L}_{t,\varepsilon}(u)$$

ist wegen (2.3)

$$(5.2) \quad \mathfrak{L}_{t,\varepsilon}(u) = \mathfrak{L}_\mu(u) + 2\varepsilon \mathfrak{Q}_\mu(\eta, u) + 3\varepsilon^2 \mathfrak{R}_\mu(\eta, \eta, u) + \dots$$

Ein mit festen Anfangswerten gebildetes Fundamentalsystem $u_i(t, \varepsilon)$ hängt analytisch von (t, ε) ab. Die Koeffizienten in $u_i(T, \varepsilon) = \sum a_{i\nu}(\varepsilon) u_\nu(0)$ sind bei $\varepsilon = 0$ analytisch. Die Determinantengleichung

$$(5.3) \quad \| a_{ik}(\varepsilon) - z \delta_{ik} \| = 0, \quad z = e^{\lambda T(\varepsilon)},$$

bestimmt die charakt. Exp. λ_k und die Lösungen \mathfrak{v} ,

$$u = e^{\lambda t} \mathfrak{v},$$

von (1.3). Da (5.1) durch $u = \dot{\eta}$ gelöst wird, ist $z = 1$ Wurzel von (5.3).

Der Exponent β , von dem in der Einleitung die Rede war, entspricht einer einfachen Wurzel der durch $z - 1$ dividierten Gleichung. $\beta(\varepsilon)$ ist also reell und bei $\varepsilon = 0$ analytisch, $\beta = \beta_2 \varepsilon^2 + \dots$ (β_1 ist aus demselben Grunde wie μ_1 und τ_1 Null). Ist nun nicht $\beta \equiv 0$, so wird in der Determinante (5. 3) (mit entsprechendem z) nicht alle Minoren $(u - 1)$ -ter Ordnung $\equiv 0$. Hieraus folgt, daß (1. 3), $\lambda = \beta$, eine bei $\varepsilon = 0$ analytische Lösung $v \equiv 0$ hat. Ist jedoch $\beta \equiv 0$, so sind nicht alle Minoren $(n - 2)$ -ter Ordnung Null. Dann gibt es bekanntlich eine bei $\varepsilon = 0$ analytische Lösung von (5. 1) der Form $u = t v + w$ mit periodischen v, w , wo entweder $v \equiv 0$ ist, oder $v = 0$ ist und w von der Lösung $u = \eta$ linear unabhängig ist.¹⁾ Daß $t v + w$ Lösung ist, drückt sich auch durch

$$(5. 4) \quad \dot{v} = \mathfrak{L}_{t, \varepsilon}(v), \quad v + \dot{w} = \mathfrak{L}_{t, \varepsilon}(w)$$

aus.

Nach diesen Vorbemerkungen berechnen wir β_2 . Wir setzen dabei $\mu_2 \neq 0$ voraus. $\beta \equiv 0$ ist dann unmöglich, wie nachträglich bewiesen wird. Führt man in (1. 3) vermöge (4. 7) s als neues t ein, so wird

$$(1 - \tau_2 \varepsilon^2 + \dots) \dot{v} + \beta v = \mathfrak{L}_{t, \varepsilon}(v)$$

und es ist (mit dem neuen t)

$$v = v_0(t) + \varepsilon v_1(t) + \varepsilon^2 v_2(t) + \dots,$$

wo alle v_i dieselbe Periode T_0 haben. Führt man die Potenzreihen für μ, β, v, η ein, so folgt (der Index Null in den Operatoren wird wie vorher weggelassen)

$$(5. 5) \quad \dot{v}_0 = \mathfrak{L}(v_0),$$

$$(5. 6) \quad \dot{v}_1 = \mathfrak{L}(v_1) + 2\mathfrak{L}(\eta_0, v_0),$$

$$(5. 7) \quad \beta_2 v_0 - \tau_2 \dot{v}_0 + \dot{v}_2 = \mathfrak{L}(v_2) + \mu_2 \mathfrak{L}'(v_0) + 2\mathfrak{L}(\eta_1, v_0) + 2\mathfrak{L}(\eta_0, v_1) + 3\mathfrak{R}(\eta_0, v_0, v_0),$$

Diese Gleichungen haben die triviale Lösung

$$(5. 8) \quad \beta_i = 0, \quad v_i = \eta_i \quad (i = 0, 1, \dots).$$

Man hat also

$$(5. 9) \quad \ddot{\eta}_1 = \mathfrak{L}(\dot{\eta}_1) + 2\mathfrak{L}(\eta_0, \dot{\eta}_0),$$

$$(5. 10) \quad -\tau_2 \ddot{\eta}_0 + \ddot{\eta}_2 = \mathfrak{L}(\dot{\eta}_2) + \mu_2 \mathfrak{L}'(\dot{\eta}_0) + 2\mathfrak{L}(\eta_1, \dot{\eta}_0) + 2\mathfrak{L}(\eta_0, \dot{\eta}_1) + 3\mathfrak{R}(\eta_0, \eta_0, \dot{\eta}_0).$$

1) Vgl. z. B. F. R. Moulton, Periodic Orbits, Washington 1920, S. 26.

Da $v_0 \neq 0$ vorausgesetzt werden darf, ist

$$(5.11) \quad v_0 = \varrho \eta_0 + \sigma \dot{\eta}_0,$$

wo nicht $\varrho = \sigma = 0$ ist. Setzt man

$$(5.12) \quad v_1 - 2\varrho \eta_1 - \sigma \dot{\eta}_1 = w,$$

so folgt aus (4.10), (5.6) und (5.9) $\dot{w} = \mathfrak{L}(w)$, also

$$(5.13) \quad w = \varrho' \eta_0 + \sigma' \dot{\eta}_0.$$

Bildet man die Kombination

$$(5.7) - \varrho(4.11) - \sigma(5.10),$$

in welcher \mathfrak{L}' herausfällt, und setzt man

$$v_2 - \varrho \eta_2 - \sigma \dot{\eta}_2 = u,$$

so ergibt sich mit Berücksichtigung von (5.11) und (5.12)

$$(5.14) \quad \beta_2 v_0 + \dot{u} = \mathfrak{L}(u) + 2\varrho(2\mathfrak{D}(\eta_0, \eta_1) + \mathfrak{R}(\eta_0, \eta_0, \eta_0)) + \mathfrak{R}$$

mit

$$\mathfrak{R} = 2\mathfrak{D}(\eta_0, w).$$

Wendet man nun auf (4.10) und (5.9) das Klammerkriterium des vorigen Abschnitts an, so folgt nach (5.13)

$$[\mathfrak{R}]_1 = [\mathfrak{R}]_2 = 0.$$

Wendet man es auf (5.14) an — u hat die Periode T_0 —, so folgt wegen (4.6), $\mathfrak{z} = \eta_0$,

$$\varrho \beta_2 = 2\varrho [2\mathfrak{D}(\eta_0, \eta_1) + \mathfrak{R}(\eta_0, \eta_0, \eta_0)]_1,$$

also wegen (4.16)

$$\varrho \beta_2 = -2\varrho \mu_2 \mathfrak{R}(\alpha').$$

Ebenso folgt

$$\sigma \beta_2 = -2\varrho \left(\tau_2 + \mu_2 \frac{\mathfrak{S}(\alpha')}{\alpha} \right).$$

Demnach ist entweder β_2 durch (1.4) gegeben — dann ist β_2 wegen $\mu_2 \neq 0$ nicht Null —, oder es ist $\beta_2 = 0$. In jedem Falle ist $\varrho : \sigma$ vollständig bestimmt (Im zweiten Fall ist $\varrho = 0$).

Zum Nachweis, daß der erste Fall wirklich eintritt, mußten wir eine längere Betrachtung anstellen. Man denke sich das Verfahren folgendermaßen schematisiert. Die Gleichung für β und v (sie ist die auf (5.4) folgende Gleichung)

chung) dividiere man durch den Klammerfaktor. Sie ist dann wieder von der Form

$$\dot{v} + \beta v = \mathfrak{L}_{t,\varepsilon}(v)$$

mit
$$\mathfrak{L}_{t,\varepsilon} = \mathfrak{L}_0 + \varepsilon \mathfrak{L}_1 + \varepsilon^2 \mathfrak{L}_2 + \dots,$$

wo \mathfrak{L}_0 ein konstanter Operator ist, während \mathfrak{L}_i , $i > 0$, von t mit der Periode T_0 abhängt. Die Koeffizienten von $1, \varepsilon$ werden durch obige Division nicht geändert. Einsetzen der Potenzreihen liefert

$$\begin{aligned} \dot{v}_0 &= \mathfrak{L}_0(v_0), \\ \dot{v}_1 &= \mathfrak{L}_0(v_1) + \mathfrak{L}_1(v_0),^1) \\ \beta_2 v_0 + \dot{v}_2 &= \mathfrak{L}_0(v_2) + \mathfrak{L}_1(v_1) + \mathfrak{L}_2(v_0), \\ \beta_3 v_0 + \beta_2 v_1 + \dot{v}_3 &= \mathfrak{L}_0(v_3) + \mathfrak{L}_1(v_2) + \mathfrak{L}_2(v_1) + \mathfrak{L}_3(v_0) \end{aligned} \quad (5.15)$$

usw. Die Situation ist folgende. Für $\varepsilon = 0$ gibt es zwei Lösungen $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}'$ der Periode T_0 . Es ist ferner

$$v_0 = \varrho \mathfrak{z} + \sigma \mathfrak{z}' \quad (5.16)$$

und

$$[\mathfrak{L}_1(\mathfrak{z})] = [\mathfrak{L}_1(\mathfrak{z}')] = 0 \quad (5.17)$$

für beide Klammerindizes. Es ergibt sich

$$v_1 = \varrho g + \sigma h + \varrho' \mathfrak{z} + \sigma' \mathfrak{z}' \quad (5.18)$$

mit festen periodischen g, h . Das Klammerkriterium ergibt für die dritte Gleichung (5.15)

$$\begin{aligned} \beta_2 \varrho &= A_1 \varrho + B_1 \sigma \\ \beta_2 \sigma &= A_2 \varrho + B_2 \sigma \end{aligned} \quad (5.19)$$

mit

$$A_i = [\mathfrak{L}_1(g) + \mathfrak{L}_2(\mathfrak{z})]_i, \quad B_i = [\mathfrak{L}_1(h) + \mathfrak{L}_2(\mathfrak{z}')]_i, \quad (5.20)$$

während ϱ', σ' wegen (5.17) herausfallen. Die Situation ist nun die, daß die Gleichungen (5.18) mit den Unbekannten β_2, ϱ, σ zwei verschiedene reelle Lösungen β_2 haben.²⁾ Zu ihnen gehören zwei linear unabhängige Paare (ϱ, σ) . Jedes der beiden Lösungssysteme führt nun zu einer eindeutigen Bestimmung der β_i, v_i durch die Rekursionsformeln, wenn man v geeignet

1) Man hätte $\beta_1 = 0$ nicht voraussetzen brauchen. Nach dem Klammerkriterium ist es eine Folge von (5.17).

2) Im allgemeinen Falle, d. h. wenn die speziellen Bedingungen (5.17) nicht erfüllt sind, tritt die Verzweigung in zwei Fälle bereits bei der zweiten Gleichung (5.15) ein. Die Lösung der Aufgabe in diesem Falle findet sich in F. R. Moulton, Periodic Orbits. Vgl. Kap. I, insbesondere S. 34 und S. 40.

normiert. Hierzu wähle man einen konstanten Vektor $\alpha \neq 0$ derart, daß $v_0 \cdot \alpha = 1$ ($t = 0$) für beide Paare (ϱ, σ) in (5.16) ausfällt. Man fordere dann

$$v \cdot \alpha = 1, \quad t = 0,$$

d. h. $v_i \cdot \alpha = 0$ ($t = 0$) für $i > 0$. Setzt man

$$\xi \cdot \alpha = C, \quad \eta \cdot \alpha = D \quad (t = 0),$$

so folgt, daß das Gleichungssystem

$$(5.21) \quad \begin{aligned} (A_1 - \beta_2) \varrho + B_1 \sigma &= 0 \\ A_2 \varrho + (B_2 - \beta_2) \sigma &= 0 \\ C \varrho + D \sigma &= 1 \end{aligned}$$

für jeden der beiden Werte von β_2 die Unbekannten ϱ, σ eindeutig festlegt. Bis jetzt sind $\beta_2, \varrho, \sigma, v_0$ bestimmt. Aus der dritten Gleichung (5.15) erhält man nach Einsetzen von (5.18) mit Berücksichtigung der Definition von g, h

$$(5.22) \quad v_2 = \varrho' g + \sigma' h + \varrho'' \xi + \sigma'' \eta + \dots,$$

wo die weggelassenen Glieder bereits bekannt sind. Setzt man (5.18) und (5.22) in die vierte Gleichung (5.15) ein, so erhält man nach Anwendung des Klammerkriteriums mit Rücksicht auf (5.20) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varrho \beta_3 - (A_1 - \beta_2) \varrho' - B_1 \sigma' &= \dots, \\ \sigma \beta_3 - A_2 \varrho' - (B_2 - \beta_2) \sigma' &= \dots. \end{aligned}$$

Dazu tritt noch wegen $v_1 \cdot \alpha = 0$ ($t = 0$) die Gleichung

$$C \varrho' + D \sigma' = \dots$$

Durch die drei Gleichungen sind nun die drei Größen $\beta_3, \varrho', \sigma'$ eindeutig bestimmt. Für die Determinante errechnet man mit Hilfe von (5.21) den Wert

$$A_1 + B_2 - 2\beta_2.$$

Er ist $\neq 0$ Null, da nach Voraussetzung (5.19) zwei verschiedene Lösungen β_2 hat. Damit sind $\beta_3, \varrho', \sigma'$ und v_1 bestimmt.

Man überzeugt sich nun leicht, daß im nächsten Schritt $\beta_4, \varrho'', \sigma''$ durch Gleichungen mit genau denselben linken Seiten bestimmt sind, und daß durch die weiteren analogen Schritte alles festgelegt wird.

Wir kehren noch einmal zu der uns interessierenden speziellen Aufgabe zurück und stellen fest, daß es bei geeigneter Normierung zwei verschiedene formale Potenzreihenpaare (β, v) gibt, die die Gleichung

$$(1 - \tau_2 \varepsilon^2 + \dots) \dot{v} + \beta v = \mathfrak{L}_{t, \varepsilon}(v)$$

lösen. Andererseits wurde vorher festgestellt, daß es unter der Voraussetzung $\beta \equiv 0$ zwei wirkliche Lösungen gibt, von denen eine bekannt ist, nämlich (5. 8). Unter dieser Voraussetzung ist also die zweite (normierte) Lösung durch die betreffenden Potenzreihen darstellbar und es gilt wirklich die Formel (1. 4) für β_2 . Zur vollständigen Erledigung muß noch gezeigt werden, daß nicht $\beta \equiv 0$ sein kann, wenn $\mu_2 \neq 0$ ist. Wir zeigen das wieder an Hand der schematisierten Aufgabe. Da (5. 19) die Lösung $\beta_2 = \varrho = 0$ hat und das zweite $\beta_2 \neq 0$ ist, ist

$$(5. 23) \quad B_1 = B_2 = 0, \quad A_1 \neq 0.$$

Wäre $\beta \equiv 0$, so hätte (5. 4) eine Lösung mit den dort angegebenen Eigenschaften.

Einsetzen der Potenzreihen für v , w ergibt

$$(5. 24) \quad \begin{aligned} v_0 + iw_0 &= \mathfrak{L}_0(w_0), \\ v_1 + iw_1 &= \mathfrak{L}_0(w_1) + \mathfrak{L}_1(w_0), \\ v_2 + iw_2 &= \mathfrak{L}_0(w_2) + \mathfrak{L}_1(w_1) + \mathfrak{L}_2(w_0). \end{aligned}$$

Es ist

$$(5. 25) \quad w_0 = \varrho \dot{z} + \sigma \ddot{z}.$$

Da v_0 auch von dieser Form ist, muß nach dem Klammerkriterium $v_0 = 0$ sein. Wegen (5. 17) folgt analog $v_1 = 0$. Ähnlich wie in (5. 18) wird

$$w_1 = \varrho g + \sigma h + \varrho' \dot{z} + \sigma' \ddot{z}.$$

Oben war bewiesen worden, daß $\dot{v} = \mathfrak{L}_{t,\varepsilon}(v)$ eine bis auf einen Faktor eindeutige Lösung der Periode T_0 hat (\dot{v}). Es ist also sicher

$$v_2 = \lambda \dot{z}.$$

Anwendung der Klammerregel auf (5. 24) ergibt ähnlich wie oben wegen (5. 20) die Gleichungen (in denen ϱ' , σ' wieder herausfallen)

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 \varrho + B_1 \sigma, \\ \lambda &= A_2 \varrho + B_2 \sigma. \end{aligned}$$

Wegen (5. 23) folgt also $\varrho = \lambda = 0$, und daher $v_2 = 0$. Nach (5. 25) ist $w_0 = \sigma \dot{z}$. Zieht man nun von der zweiten Gleichung (5. 4) die Lösung $\sigma \dot{v}$ von $iw = \mathfrak{L}(w)$ ab und dividiert man durch ε , so kann man das ganze Verfahren wiederholen, und es folgt schrittweise $v_i = 0$, also $v = 0$. Damit ist bewiesen, daß nicht $\beta = 0$ sein kann.

Die Rechtfertigung der Formel (1. 4) ist damit unter der Voraussetzung $\mu_2 \neq 0$ vollständig. Diese Voraussetzung könnte durch $\mu \equiv 0$ ersetzt werden.

Die Betrachtung würde sich allein darin ändern, daß in der Koeffizientenberechnung der Verzweigungsfall später auftritt.

Die Umständlichkeit der Überlegung könnte folgendermaßen vermieden werden. Man berechnet zuerst rein formal wie oben die Koeffizienten der Potenzreihen für β und ν und beweist dann die Konvergenz direkt durch geeignete Anwendung der Majorantenmethode. Dies entspräche unserer Absicht, die Anwendung auf partielle Differentialsysteme zu erleichtern. Man kann aber auch die Diskussion des Verzweigungsfalles und den Beweis von (1.4) ausschließlich mit Determinanten führen.